# 2. SISTEM ANTRIAN *M/M/1*

**Dalam bahasan pokok ini akan dibahas :**

- **Sistem antrian *M*/*M*/1/GD/∞/∞ yaitu sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu layannya berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang berangkat berdistribusi Poisson, jumlah pelayan sebanyak satu, disiplin pelayanan umum (*general discipline*), jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebanyak takhingga pelanggan, dan jumlah populasi pelanggan sebanyak takhingga pelanggan.**
- **Sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞ yaitu sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu layannya berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang berangkat berdistribusi Poisson, jumlah pelayan sebanyak satu, disiplin pelayanan umum (*general discipline*), jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebanyak *K* pelanggan, dan jumlah populasi pelanggan sebanyak takhingga pelanggan.**

## 2.1. SISTEM ANTRIAN *M*/*M*/1/GD/∞/∞

Sistem antrian
*M*/*M*/1/GD/∞/∞

**Sistem antrian *M*/*M*/1/GD/∞/∞ yaitu sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu layannya berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang berangkat berdistribusi Poisson, jumlah pelayan sebanyak satu, disiplin pelayanan umum (*general discipline*), jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebanyak takhingga pelanggan, dan jumlah populasi pelanggan sebanyak takhingga pelanggan.**

**NOTASI-NOTASI YANG PENTING :**

Notasi-notasi yang penting

- $\lambda$ **menyatakan laju datang (*arrival rate*) yaitu jumlah pelanggan yang datang rata-rata per satuan waktu**
- $\mu$ **menyatakan laju layan yaitu jumlah pelanggan yang telah dilayani rata-rata per satuan waktu**
- $\lambda_n$ **menyatakan laju datang dari keadaan (*state*) jumlah pelanggan sebanyak *n***
- $\mu_n$ **menyatakan laju layan dari keadaan jumlah pelanggan sebanyak *n***
- $\rho$ **menyatakan faktor utilisasi**
- $p_n$ **menyatakan probabilitas ada *n* pelanggan dalam sistem antrian yang keadaannya mapan (*steady state*), $p_n$ menyatakan juga ekspektasi proporsi waktu bahwa sistem berada dengan jumlah pelanggan sebanyak *n*.**

  **Keadaan mapan (*steady state*) berarti distribusi probabilitas jumlah pelanggan dalam antrian dan distribusi probabilitas jumlah pelanggan dalam sistem tidak bergantung waktu.**

$\lambda_{eff}$ = laju datang rata-rata effektif = $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n$

*EN* ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem

$EN_q$ ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian

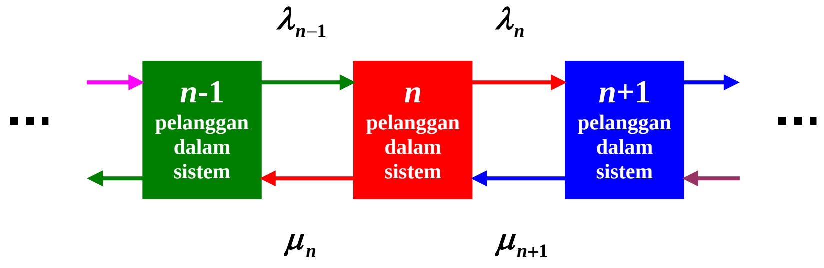
*EW* ekspektasi waktu sistem yaitu waktu rata-rata pelanggan berada dalam sistem

*ED* ekspektasi waktu antri yaitu waktu rata-rata pelanggan berada dalam antrian

*EI* ekspektasi waktu antardatang pelanggan, yaitu besarnya sama dengan $\dfrac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n} = \dfrac{1}{\lambda}$

*EX* ekspektasi waktu layan pelanggan, yaitu besarnya sama dengan $\dfrac{1}{\mu}$

Perhatikan gambar di bawah ini :




Gambar 2.1. Diagram laju transisi keadaan jumlah pelanggan.

Dalam proses Poisson, jika pada saat *t* ada *n* pelangan dalam sistem, maka pada saat *t*+selang waktu yang cukup kecil *h* akan menjadi *n*-1 pelanggan atau *n*+1 pelanggan. Gambar 2.1. menggambarkan perubahan keadaan jumlah pelanggan *n*, *n*-1, dan *n*+1. Perubahan keadaan jumlah pelanggan dari *n*-1 ke *n* karena adanya laju datang pelanggan $\lambda_{n-1}$. Perubahan keadaan jumlah pelanggan dari *n* ke *n*+1 karena adanya laju datang pelanggan $\lambda_n$. Perubahan keadaan jumlah pelanggan dari *n* menjadi *n*-1 karena adanya laju layan $\mu_n$. Perubahan keadaan jumlah pelanggan dari *n*+1 menjadi *n* karena adanya laju layan $\mu_{n+1}$.

Pada kondisi keadaan mapan (*steady state*), ekpektasi laju aliran yang masuk ke keadaan jumlah pelanggan *n* sama dengan ekspektasi laju aliran yang keluar dari keadaan jumlah pelanggan *n*.

Ekpektasi laju aliran yang masuk ke keadaan jumlah pelanggan *n*

$$= \lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} \ ,$$

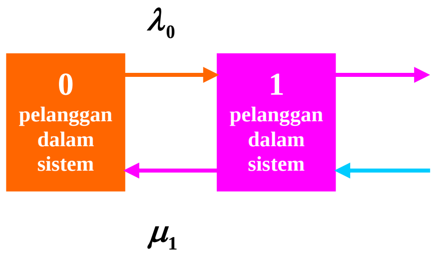
ekspektasi laju aliran yang keluar dari keadaan jumlah pelanggan *n*

$$= \lambda_n p_n + \mu_n p_n$$

sehingga

$$\lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} = \lambda_n p_n + \mu_n p_n \ , \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Untuk *n* = 0




$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$$

Untuk *n* = 1

$$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = \lambda_1 p_1 + \mu_1 p_1$$

sehingga didapat

$$p_2 = \frac{\lambda_1 p_1 + \mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0}{\mu_2}$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1 \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 + \mu_1 \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 - \lambda_0 p_0}{\mu_2}$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0$$

**Untuk $n$ = 2 didapat**

$$p_3 = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} p_0$$

**Untuk $n$ = 3 didapat**

$$p_4 = \frac{\lambda_3 \lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_4 \mu_3 \mu_2 \mu_1} p_0$$

**Secara umum didapat**

$$p_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} p_0 , \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (2.1)$$

**Nilai $p_0$ didapat dari $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$**

**Untuk sistem antrian $M/M/1/GD/\infty/\infty$ dengan $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ <1 dan dalam keadaan mapan, dan diasumsikan $\lambda_i = \lambda$, $i$ = 0, 1, 2, … dan $\mu_i = \mu$, $i$ = 1, 2, 3, …maka**

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 , \quad n \geq 0 \qquad (2.2)$$

**nilai $p_0$ didapat dari $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = 1$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$p_0 = \frac{1}{1+\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}}$$

$$p_0 = \frac{1}{\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}+\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}}$$

$$p_0 = 1-\frac{\lambda}{\mu} \qquad (2.\ 3)$$

Probabilitas nol dari *M*/*M*/1/GD/∞/∞

atau

$$p_0 = 1-\rho \qquad (2.\ 4)$$

sehingga

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, \quad n \geq 0$$

$$p_n = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad n \geq 0 \qquad (2.5)$$

Probabilitas *n* dari *M*/*M*/1/GD/∞/∞

Untuk sistem antrian *M*/*M*/1, $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ sehingga

$$p_n = (1-\rho)\rho^n, \quad n \geq 0 \qquad (2.6)$$

Ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem *EN*

$$EN = \sum_{n=0}^{\infty} np_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n$$

$$= (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$

$$= (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho\rho^{n-1}$$

$$= (1-\rho)\rho\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1}$$

$$= (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n$$

$$= (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\right)$$

$$= (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left(1+\frac{\rho}{1-\rho}\right)$$

$$= (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$$

$$= (1-\rho)\rho\left\{\frac{0(1-\rho)-(0-1)1}{(1-\rho)^2}\right\}$$

**jadi ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem *EN***

**EN dari M/M/1/GD/∞/∞**

$$EN = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad (2.7)$$

**Ekspektasi waktu sistem *EW***

$$EW = EIEN = \frac{EN}{\lambda}$$

$$EW = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)$$

**jadi ekspektasi waktu sistem *EW***

**EW dari M/M/1/GD/∞/∞**

$$EW = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \qquad (2.8)$$

**Ekspektasi waktu antri atau disebut ekspektasi waktu tunggu dalam antrian atau disebut juga ekspektasi waktu tunda**

***ED* = *EW* dikurangi ekspektasi waktu layan pelanggan**

$$ED = \frac{1}{\mu(1-\rho)} - \frac{1}{\mu}$$

**jadi ekspektasi waktu antri *ED***

**ED dari M/M/1/GD/∞/∞**

$$ED = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \qquad (2.9)$$

**Ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian $EN_q$**

$$EN_q = \frac{ED}{EI}$$

$$EN_q = \frac{\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}}{\frac{1}{\lambda}}$$

**jadi ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian $EN_q$**

**ENq dari M/M/1/GD/∞/∞**

$$EN_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (2.10)$$

**Contoh 2.1**

**Suatu sistem antrian *M*/*M*/1/GD/∞/∞ laju datang $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, sedangkan laju layan $\mu$ sebesar lima pelanggan per jam.**

**a. Berapa probabilitasnya tidak ada pelanggan dalam sistem?**

**b. Berapa probabilitasnya ada lima pelanggan dalam sistem?**

**c. Berapa probabilitasnya ada paling banyak empat pelanggan dalam sistem?**

**d. Berapa probabilitasnya ada paling sedikit tujuh pelanggan dalam sistem?**

**e. Berapa ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem?**

**f. Berapa ekspektasi waktu sistem?**

**g. Berapa ekspektasi waktu antri?**

**h. Berapa ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian?**

**i. Berapa ekspektasi jumlah pelanggan yang dilayani oleh pelayan?**

**Jawab :**

**a.** $\lambda \; = \; 3\,\dfrac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$

$\mu \; = \; 5\,\dfrac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$

$\rho \; = \; \dfrac{\lambda}{\mu}$ **= 0,6**

**Probabilitasnya tidak ada pelanggan dalam sistem**

$p_0 \; = \; 1 - \rho$ **= 0,4**

**artinya dalam sistem antrian tersebut 40% dari seluruh waktunya berada dalam keadaan tidak ada pelanggan dalam sistemnya alias pelayannya menganggur.**

**b. Probabilitasnya ada lima pelanggan dalam sistem**

$p_5 \; = \; (1-\rho)\rho^5$ **= 0,03110**

**artinya dalam sistem antrian tersebut 3,11% dari seluruh waktunya berada dalam keadaan ada lima pelanggan yang berada dalam sistem antrian.**

**c. Probabilitasnya ada paling banyak empat pelanggan dalam sistem**

$= \sum_{i=0}^{4} p_i$ **= 0,92224**

**artinya dalam sistem antrian tersebut 92,224% dari seluruh waktunya berada dalam keadaan ada 0 atau 1 atau 2 atau 3 atau 4 pelanggan yang berada dalam sistem antrian,**

**di mana** $p_0 \; = \; (1-\rho)\rho^0$ **= 0,40000**

$p_1 \; = \; (1-\rho)\rho^1$ **= 0,24000**

$p_2 \; = \; (1-\rho)\rho^2$ **= 0,14400**

$p_3 \; = \; (1-\rho)\rho^3$ **= 0,08640**

$$p_4 = (1-\rho)\rho^4 = 0{,}05184$$

d. **Probabilitasnya ada paling sedikit tujuh pelanggan dalam sistem**

$$= \sum_{i=7}^{\infty} p_i = 1 - \sum_{i=0}^{6} p_i = 0{,}02799$$

**di mana** $p_0 = (1-\rho)\rho^0 = 0{,}40000$

$$p_1 = (1-\rho)\rho^1 = 0{,}24000$$

$$p_2 = (1-\rho)\rho^2 = 0{,}14400$$

$$p_3 = (1-\rho)\rho^3 = 0{,}08640$$

$$p_4 = (1-\rho)\rho^4 = 0{,}05184$$

$$p_5 = (1-\rho)\rho^5 = 0{,}03110$$

$$p_6 = (1-\rho)\rho^6 = 0{,}01866$$

$$\sum_{i=0}^{6} p_i = 0{,}97201$$

e. **Ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem**

$$EN = \frac{\rho}{1-\rho} = 1{,}5 \text{ pelanggan.}$$

f. **Ekspektasi waktu sistem**

$$EW = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) = 0{,}5 \text{ jam.}$$

g. **Ekspektasi waktu antri**

$$ED = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = 0{,}3 \text{ jam.}$$

h. **Ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian**

$$EN_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 0{,}9 \text{ pelanggan.}$$

i. **Ekspektasi jumlah pelanggan yang dilayani oleh pelayan**

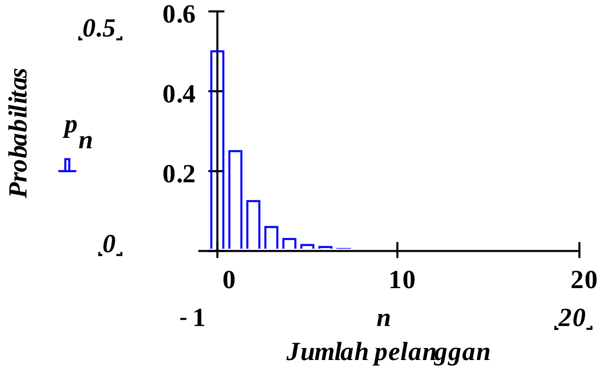
$= EN - EN_q = 0{,}6$ **pelanggan.**

**Contoh 2.2**

**Suatu sistem antrian $M/M/1/\mathrm{GD}/\infty/\infty$ laju datang $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, sedangkan laju layan $\mu$ sebesar enam pelanggan per jam. Hubungan antara jumlah pelanggan $n$ dengan probabilitas $p_n$ tampak dalam tabel dan gambar di bawah ini.**

**Tabel 2.1. Hubungan jumlah pelanggan $n$ dengan probabilitas $p_n$ untuk sistem antrian $M/M/1/\mathrm{GD}/\infty/\infty$, laju datang $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, sedangkan laju layan $\mu$ sebesar enam pelanggan per jam.**

| *n* | Probabilitas |
|---|---|
| 0 | 0,50000 |
| 1 | 0,25000 |
| 2 | 0,12500 |
| 3 | 0,06250 |
| 4 | 0,03125 |
| 5 | 0,01563 |
| 6 | 0,00781 |
| 7 | 0,00391 |
| 8 | 0,00195 |
| 9 | 0,00098 |
| 10 | 0,00049 |
| 11 | 0,00024 |
| 12 | 0,00012 |
| 13 | 0,00006 |
| 14 | 0,00003 |
| 15 | 0,00002 |
| 16 | 0,00001 |
| 17 | 0,00000 |
| 18 | 0,00000 |
| 19 | 0,00000 |
| 20 | 0,00000 |



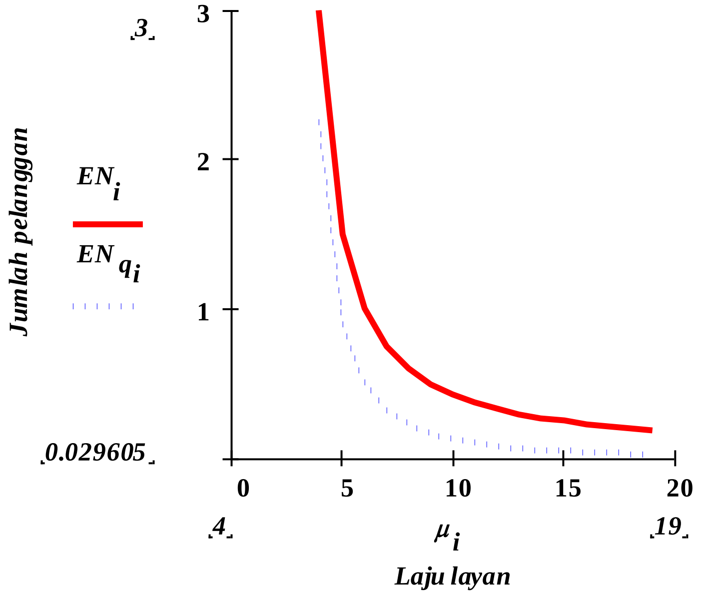

**Gambar 2.2. Hubungan jumlah pelanggan *n* dengan probabilitas $p_n$ untuk sistem antrian *M*/*M*/1/GD/∞/∞, laju datang $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, sedangkan laju layan $\mu$ sebesar enam pelanggan per jam.**

**Contoh 2.3**

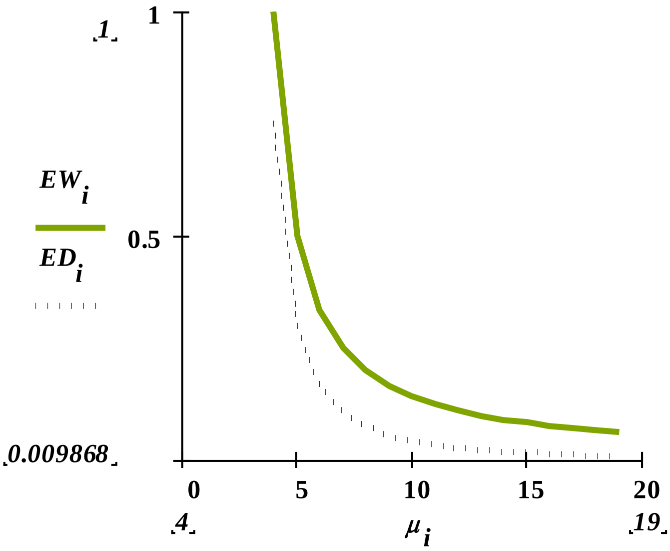
**Sistem antrian *M*/*M*/1/GD/∞/∞ laju datang $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam. Hubungan antara ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem dengan laju layan $\mu > 3$, tampak dalam tabel dan gambar di bawah ini.**

**Tabel 2.2. Hubungan laju layan $\mu$ dengan *EN, EW, ED,* $EN_q$, dan $\rho$ dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/∞/∞ dengan laju datang $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam.**

| Laju layan | *EN* | *EW* | *ED* | *ENq* | Rho |
|---|---|---|---|---|---|
| 4,00 | 3,000 | 1,000 | 0,750 | 2,250 | 0,750 |
| 5,00 | 1,500 | 0,500 | 0,300 | 0,900 | 0,600 |
| 6,00 | 1,000 | 0,333 | 0,167 | 0,500 | 0,500 |
| 7,00 | 0,750 | 0,250 | 0,107 | 0,321 | 0,429 |
| 8,00 | 0,600 | 0,200 | 0,075 | 0,225 | 0,375 |
| 9,00 | 0,500 | 0,167 | 0,056 | 0,167 | 0,333 |
| 10,00 | 0,429 | 0,143 | 0,043 | 0,129 | 0,300 |
| 11,00 | 0,375 | 0,125 | 0,034 | 0,102 | 0,273 |
| 12,00 | 0,333 | 0,111 | 0,028 | 0,083 | 0,250 |
| 13,00 | 0,300 | 0,100 | 0,023 | 0,069 | 0,231 |
| 14,00 | 0,273 | 0,091 | 0,019 | 0,058 | 0,214 |
| 15,00 | 0,250 | 0,083 | 0,017 | 0,050 | 0,200 |
| 16,00 | 0,231 | 0,077 | 0,014 | 0,043 | 0,188 |
| 17,00 | 0,214 | 0,071 | 0,013 | 0,038 | 0,176 |
| 18,00 | 0,200 | 0,067 | 0,011 | 0,033 | 0,167 |




**Gambar 2.3. Hubungan laju layan $\mu$ dengan *EN,* $EN_q$ dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/∞/∞ dengan laju datang $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam.**



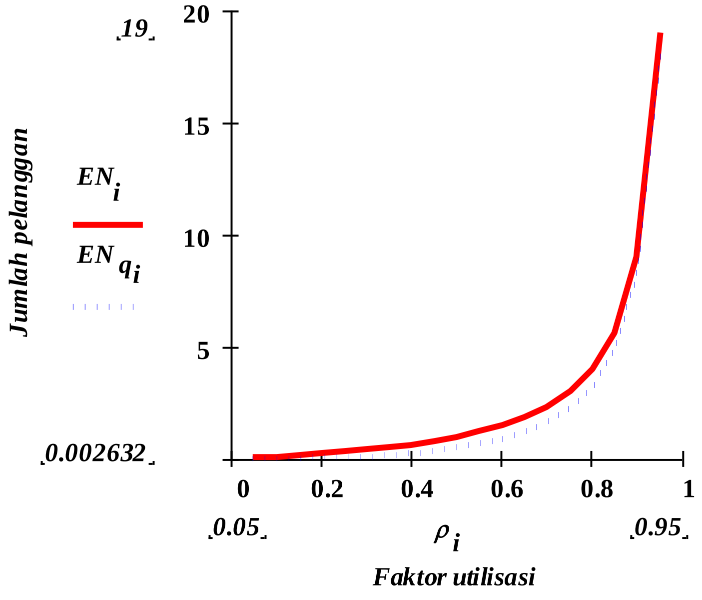

**Gambar 2.4. Hubungan laju layan $\mu$ dengan *EW*, *ED* dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/∞/∞ dengan laju datang $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam.**

**Contoh 2.4**

**Dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/∞/∞, hubungan faktor utilisasi $\rho$ dengan ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem *EN*, ekspektasi jumlah pelanggan antri $EN_q$, tampak dalam tabel dan gambar di bawah ini.**

**Tabel 2.3. Hubungan faktor utilisasi $\rho$ dengan ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem *EN*, ekspektasi jumlah pelanggan antri $EN_q$, dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/∞/∞.**

| Rho | *EN* | *Enq* |
|---|---|---|
| 0,050 | 0,053 | 0,003 |
| 0,100 | 0,111 | 0,011 |
| 0,150 | 0,176 | 0,026 |
| 0,200 | 0,250 | 0,050 |
| 0,250 | 0,333 | 0,083 |
| 0,300 | 0,429 | 0,129 |
| 0,350 | 0,538 | 0,188 |
| 0,400 | 0,667 | 0,267 |
| 0,450 | 0,818 | 0,368 |
| 0,500 | 1,000 | 0,500 |
| 0,550 | 1,222 | 0,672 |
| 0,600 | 1,500 | 0,900 |
| 0,650 | 1,857 | 1,207 |
| 0,700 | 2,333 | 1,633 |
| 0,750 | 3,000 | 2,250 |
| 0,800 | 4,000 | 3,200 |
| 0,850 | 5,667 | 4,817 |
| 0,900 | 9,000 | 8,100 |




**Gambar 2.5. Hubungan faktor utilisasi $\rho$ dengan ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem $EN$, ekspektasi jumlah pelanggan antri $EN_q$, dalam sistem antrian $M/M/1/\mathrm{GD}/\infty/\infty$.**

## 2.2. SISTEM ANTRIAN *M*/*M*/1/GD/*K*/∞

Sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞

**Sistem antrian $M/M/1/\mathrm{GD}/K/\infty$ yaitu sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu layannya berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang berangkat berdistribusi Poisson, jumlah pelayan sebanyak satu, disiplin pelayanan umum (*general discipline*), jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebanyak $K$ pelanggan, dan jumlah populasi pelanggan sebanyak takhingga pelanggan.**

**NOTASI-NOTASI YANG PENTING :**

Notasi-notasi yang penting

$\lambda$ **menyatakan laju datang (*arrival rate*) yaitu jumlah pelanggan yang datang rata-rata per satuan waktu**

$\mu$ **menyatakan laju layan yaitu jumlah pelanggan yang telah dilayani rata-rata per satuan waktu**

$\lambda_n$ **menyatakan laju datang dari keadaan (*state*) jumlah pelanggan sebanyak *n***

$\mu_n$ **menyatakan laju layan dari keadaan jumlah pelanggan sebanyak *n***

$\rho$ **menyatakan faktor utilisasi**

$p_n$ **menyatakan probabilitas ada *n* pelanggan dalam sistem antrian yang keadaannya mapan (*steady state*), $p_n$ menyatakan juga ekspektasi proporsi waktu bahwa sitem berada dengan jumlah pelanggan sebanyak *n*.**

**Keadaan mapan (*steady state*) berarti distribusi probabilitas jumlah pelanggan dalam antrian dan distribusi probabilitas jumlah pelanggan dalam sistem tidak bergantung waktu.**

$\lambda_{eff}$ = **laju datang rata-rata effektif** = $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n$

$EN$ **ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem**

$EN_q$ **ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian**

$EW$ **ekspektasi waktu sistem**

$ED$ **ekspektasi waktu antri**

$EI$ **ekspektasi waktu antardatang pelanggan, yaitu besarnya sama dengan** $\dfrac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n}$

$EX$ **ekspektasi waktu layan pelanggan, yaitu besarnya sama dengan** $\dfrac{1}{\mu}$

$K$ jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem antrian

Untuk sistem antrian $M/M/1/GD/K/\infty$, dalam keadaan mapan, $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, dan diasumsikan

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n = 1,2,\dots,K-1 \\ 0, & n = K, K+1, K+2,\dots \end{cases}$$

dan

$\mu_i = \mu$, $i = 1, 2, 3, \dots$

maka didapat

$$p_n = \begin{cases} \rho^n p_0, & n \le K \\ 0, & n > K \end{cases}$$

Dari

$$\sum_{n=0}^{K} p_n = 1$$

$$p_0 + \rho p_0 + \rho^2 p_0 + \dots + \rho^K p_0 = 1$$

$p_0\left(1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^K\right) = 1$, untuk $\rho \ne 1$

$p_0\left(\dfrac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}\right) = 1$, untuk $\rho \ne 1$,

untuk $\rho = 1$ maka $p_0\left(1 + 1 + 1 + \dots + 1\right)$ - 1

maka $p_0\left(1 + K\right) = 1$,

sehingga

Probabilitas nol dari $M/M/1/GD/K/\infty$

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \ne 1 \\ \dfrac{1}{1+K}, & \rho = 1 \end{cases} \tag{2.11}$$

Probabilitas ada $n$ pelanggan dalam sistem antrian $p_n$

Probabilitas *n* dari *M*/*M*/1/GD/*K*/∞

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^n, & \rho \neq 1, \quad n = 0,1,2,\ldots,K \\ \dfrac{1}{1+K}, & \rho = 1, \quad n = 0,1,2,\ldots,K \\ 0, & n > K \end{cases} \tag{2.12}$$

Dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞ tidak dipersyaratkan bahwa $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$.

Ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem *EN* untuk $\rho \neq 1$ adalah

$$\begin{aligned} EN &= \sum_{n=0}^{K} np_n \\ &= \sum_{n=0}^{K} n\frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^n \\ &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\sum_{n=0}^{K} n\rho^n \\ &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\sum_{n=0}^{K} n\rho\rho^{n-1} \\ &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho\sum_{n=0}^{K} n\rho^{n-1} \\ &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho\sum_{n=0}^{K} \frac{d}{d\rho}n\rho^n \\ &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho\frac{d}{d\rho}\sum_{n=0}^{K} n\rho^n \\ &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}\right) \\ &= \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho\frac{1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{(1-\rho)^2} \end{aligned}$$

sehingga

$$EN = \frac{\rho\left\{1-(K+1)\rho^{K}+K\rho^{K+1}\right\}}{(1-\rho)\left(1-\rho^{K+1}\right)}, \quad \text{untuk } \rho \neq 1.$$

Ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem *EN* untuk $\rho = 1$ adalah

$$\begin{aligned}
EN &= \sum_{n=0}^{K} np_n \\
&= \sum_{n=0}^{K} n\frac{1}{K+1} \\
&= \frac{1}{K+1}\sum_{n=0}^{K} n \\
&= \frac{1}{K+1}\left\{\frac{K+1}{2}(0+K)\right\} \\
&= \frac{K}{2}
\end{aligned}$$

$$EN = \frac{K}{2}, \quad \text{untuk } \rho = 1.$$

Sehingga ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem *EN* adalah

EN dari M/M/1/GD/K/∞

$$EN = \begin{cases} \dfrac{\rho\left\{1-(K+1)\rho^{K}+K\rho^{K+1}\right\}}{(1-\rho)\left(1-\rho^{K+1}\right)}, & \text{untuk } \rho \neq 1 \\[2ex] \dfrac{K}{2}, & \text{untuk } \rho = 1 \end{cases} \tag{2.13}$$

Untuk $\rho \neq 1$ :

$$\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n p_n = \frac{1}{EI}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{eff} &= \sum_{n=0}^{K}\lambda_n p_n \\
&= \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_{K-1} p_{K-1} + \lambda_K p_K \\
&= \lambda p_0 + \lambda p_1 + \cdots + \lambda p_{K-1} + 0\, p_K
\end{aligned}$$

$$= \lambda\left(p_0 + p_1 + \cdots + p_{K-1}\right)$$

**karena** $\sum_{n=0}^{K} p_n = 1$

**maka** $\lambda_{eff} = \dfrac{1}{EI}$

$$\lambda_{eff} = \lambda(1 - p_K)$$

$$= \lambda\left(1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^K\right), \qquad \rho \neq 1$$

$$= \lambda\left(\frac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}}\right)$$

**Untuk** $\rho = 1$ **:**

$$= \lambda\left(p_0 + p_1 + \cdots + p_{K-1}\right)$$

$$=$$

$$\lambda_{eff} = \frac{1}{EI}$$

$$\lambda_{eff} = \lambda(1 - p_K)$$

$$= \lambda\left(1 - \frac{1}{1+K}\right)$$

$$= \lambda\frac{K}{1+K},$$

**jadi**

$$\lambda_{eff} = \frac{1}{EI} = \begin{cases} \lambda\dfrac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1 \\ \lambda\dfrac{K}{1+K}, & \rho = 1 \end{cases} \tag{2.14}$$

**Ekspektasi waktu sistem** $EW$

$$EW = EN\,EI = \frac{EN}{\lambda_{eff}}$$

**Ekspektasi waktu antri** $ED$

$$ED = EW - EX = EW - \frac{1}{\mu}$$

**Ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian** $EN_q$

$$EN_q = \frac{ED}{EI} = \lambda_{eff}\, ED$$

**Contoh 2.5**

**Suatu sistem antrian $M/M/1/GD/K/\infty$ laju datang $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, laju layan $\mu$ sebesar empat pelanggan per jam, sedangkan $K$=9.**

**a. Berapa $p_0$ ?**

**b. Berapa $p_6$ ?**

**c. Berapa $EN$ ?**

**d. Berapa $EW$ ?**

**e. Berapa $ED$ ?**

**f. Berapa $EN_q$ ?**

**Jawab :**

$$\lambda = 3\ \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}},\ \text{dan}\ \mu = 4\ \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}75000$$

**a.**

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{1+K}, & \rho = 1 \end{cases}$$

**karena $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}75000 \neq 1$ maka**

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} = 0{,}26492$$

**artinya 26,492% dari waktu, tidak ada pelanggan dalam sistem antrian.**

**b.**

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^n, & \rho \neq 1, \quad n = 0,1,2,\ldots,K \\ \dfrac{1}{1+K}, & \rho = 1, \quad n = 0,1,2,\ldots,K \\ 0, & n > K \end{cases}$$

**karena** $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ **= 0,75000** $\neq 1$ **maka**

$$p_6 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^6 = 0{,}04715$$

**artinya 4,715% dari waktu, ada enam pelanggan dalam sistem antrian.**

**c.**

$$EN = \begin{cases} \dfrac{\rho\{1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}\}}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})}, & \text{untuk } \rho \neq 1 \\ \dfrac{K}{2}, & \text{untuk } \rho = 1 \end{cases}$$

**karena** $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ **= 0,75000** $\neq 1$**,** $K$ **= 9 maka**

$$EN = \frac{\rho\{1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}\}}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})} = 2{,}40326 \text{ pelanggan.}$$

**artinya ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem antrian sebesar 2,40326 pelanggan.**

**d.** $EW = EN\,EI = \dfrac{EN}{\lambda_{eff}} = 0{,}81734$ **jam**

**di mana**

$$EN = \frac{\rho\{1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}\}}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})} = 2{,}40326 \text{ pelanggan,}$$

$$EI = 0{,}34010 \ \frac{\text{jam}}{\text{pelanggan}},$$

$$\lambda_{eff} = \frac{1}{EI} = \begin{cases} \lambda \dfrac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1 \\ \lambda \dfrac{K}{1+K}, & \rho = 1 \end{cases}$$

$\lambda_{eff} = \dfrac{1}{EI} = \lambda \dfrac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$ = 2,94033 $\dfrac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$ untuk $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

= 0,75000 $\neq 1$.

$EW$ = 0,81734 jam artinya ekspektasi waktu sistem sebesar 0,81734 jam.

e. $ED = EW - EX = EW - \dfrac{1}{\mu}$ = 0,56734 jam,

di mana

$EW$ = 0,81734 jam dan $\dfrac{1}{\mu}$ = 0,25000 jam.

$ED$ = 0,56734 jam artinya ekspektasi waktu antri sebesar 0,56734 jam.

f. $EN_q = \dfrac{ED}{EI} = \lambda_{eff}\, ED$ = 1,66818 pelanggan

di mana

$ED$ = 0,56734 jam,

$EI$ = 0,34010 $\dfrac{\text{jam}}{\text{pelanggan}}$,

$\lambda_{eff} = \dfrac{1}{EI} = \lambda \dfrac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$ = 2,94033 $\dfrac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$.

$EN_q$ = 1,66818 pelanggan artinya ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian sebesar 1,66818 pelanggan.

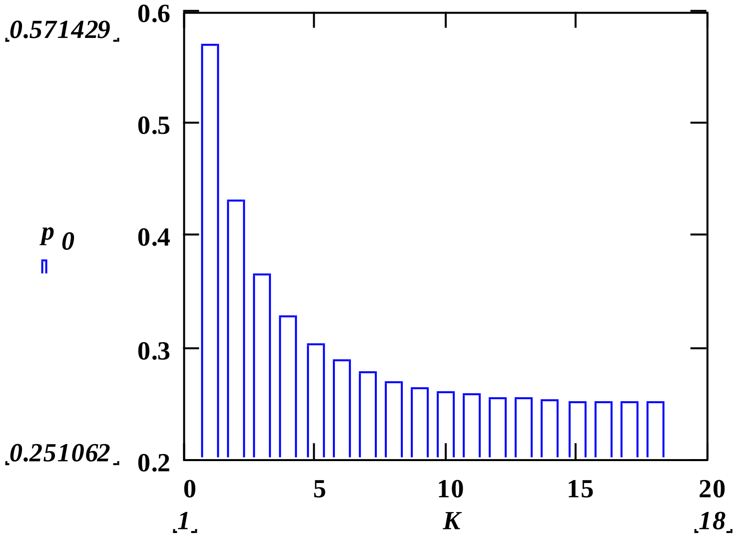
**Contoh 2.6**

Suatu sistem antrian $M/M/1/GD/K/\infty$ laju datang $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, laju layan $\mu$ sebesar empat pelanggan per jam, sedangkan $K$ bervariasi dari 1, 2, …, 18.

**Besarnya probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem antrian dan ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem tampak dalam tabel-tabel di bawah ini.**

**Tabel 2.4. Hubungan jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem antrian *K* dengan probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem $p_0$, dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞.**

| *K* | Prob. nol pelanggan |
|---|---|
| 1 | 0,57143 |
| 2 | 0,43243 |
| 3 | 0,36571 |
| 4 | 0,32778 |
| 5 | 0,30413 |
| 6 | 0,28851 |
| 7 | 0,27781 |
| 8 | 0,27030 |
| 9 | 0,26492 |
| 10 | 0,26102 |
| 11 | 0,25818 |
| 12 | 0,25608 |
| 13 | 0,25454 |
| 14 | 0,25339 |
| 15 | 0,25253 |
| 16 | 0,25189 |
| 17 | 0,25142 |
| 18 | 0,25106 |

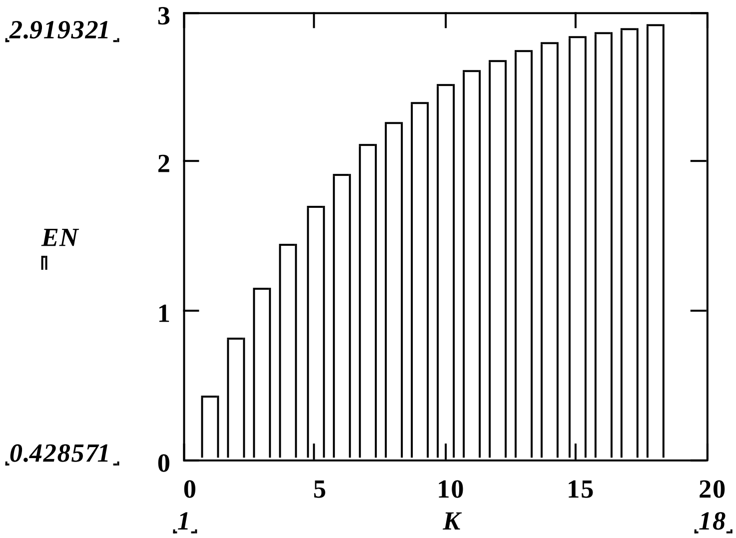



**Gambar 2.6. Hubungan jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem antrian *K* dengan probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem $p_0$ , dalam sistem antrian**

**$M/M/1/GD/K/\infty$.**

**Tabel 2.5. Hubungan jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem antrian *K* dengan ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem *EN*, dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞.**

| *K* | *EN* |
|---|---|
| 1 | 0,42857 |
| 2 | 0,81081 |
| 3 | 1,14857 |
| 4 | 1,44430 |
| 5 | 1,70092 |
| 6 | 1,92167 |
| 7 | 2,11000 |
| 8 | 2,26938 |
| 9 | 2,40326 |
| 10 | 2,51493 |
| 11 | 2,60745 |
| 12 | 2,68364 |
| 13 | 2,74602 |
| 14 | 2,79683 |
| 15 | 2,83801 |
| 16 | 2,87124 |
| 17 | 2,89795 |
| 18 | 2,91932 |




**Gambar 2.7. Hubungan jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem antrian *K* dengan ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem *EN*, dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞.**

**Contoh 2.7**

**Suatu sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞ laju datang $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, laju layan $\mu$ sebesar tiga pelanggan per jam, sedangkan *K*=9.**

g. **Berapa $p_0$ ?**

h. **Berapa $p_6$ ?**

i. **Berapa *EN* ?**

j. **Berapa *EW* ?**

k. **Berapa *ED* ?**

l. **Berapa $EN_q$ ?**

**Jawab :**

$$\lambda = 3 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}, \text{ dan } \mu = 3 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1{,}00000$$

**a.**

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{1+K}, & \rho = 1 \end{cases}$$

**karena** $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1{,}00000$ **maka**

$$p_0 = \frac{1}{1+K} = 0{,}10000$$

**artinya 10,000% dari waktu, tidak ada pelanggan dalam sistem antrian.**

**b.**

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^n, & \rho \neq 1, \quad n = 0,1,2,\ldots,K \\ \dfrac{1}{1+K}, & \rho = 1, \quad n = 0,1,2,\ldots,K \\ 0, & n > K \end{cases}$$

**karena $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ = 1,00000 maka**

$$p_6 = \frac{1}{1+K} = 0{,}10000$$

**artinya 10,000% dari waktu, ada enam pelanggan dalam sistem antrian.**

**c.**

$$EN = \begin{cases} \dfrac{\rho\{1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}\}}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})}, & \text{untuk } \rho \neq 1 \\[2ex] \dfrac{K}{2}, & \text{untuk } \rho = 1 \end{cases}$$

**karena $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ = 1,00000, $K$ = 9 maka**

$$EN = \frac{K}{2} = 4{,}50000 \text{ pelanggan.}$$

**artinya ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem antrian sebesar 4,50000 pelanggan.**

**d.** $EW = EN\,EI = \dfrac{EN}{\lambda_{eff}}$ **= 1,66667 jam**

**di mana**

$$EN = \frac{K}{2} = 4{,}50000 \text{ pelanggan,}$$

$$EI = 0{,}37037 \ \frac{\text{jam}}{\text{pelanggan}},$$

$$\lambda_{eff} = \frac{1}{EI} = \begin{cases} \lambda \dfrac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1 \\[2ex] \lambda \dfrac{K}{1+K}, & \rho = 1 \end{cases}$$

$$\lambda_{eff} = \frac{1}{EI} = \lambda \frac{1}{1+K} = 2{,}70000 \ \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}} \text{ untuk } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1{,}00000.$$

***EW* = 1,66667 jam artinya ekspektasi waktu sistem sebesar 1,66667 jam.**

e. $ED = EW - EX \quad = \; EW - \frac{1}{\mu}$ = 1,33333 jam,

di mana

$EW$ = 1,66667 jam dan $\frac{1}{\mu}$ = 0,33333 jam.

$ED$ = 1,33333 jam artinya ekspektasi waktu antri sebesar 1,33333 jam.

f. $EN_q \; = \; \frac{ED}{EI} \; = \; \lambda_{eff}\, ED$ = 3,60000 pelanggan

di mana

$ED$ = 1,33333 jam,

$EI$ = 0,37037 $\frac{\text{jam}}{\text{pelanggan}}$,

$\lambda_{eff} = \frac{1}{EI} = \lambda \frac{1}{1+K}$ = 2,70000 $\frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$ untuk $\rho \; = \; \frac{\lambda}{\mu} \; =$ 1,00000.

$EN_q$ = 3,60000 pelanggan artinya ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian sebesar 3,60000 pelanggan.

**Contoh 2.8**

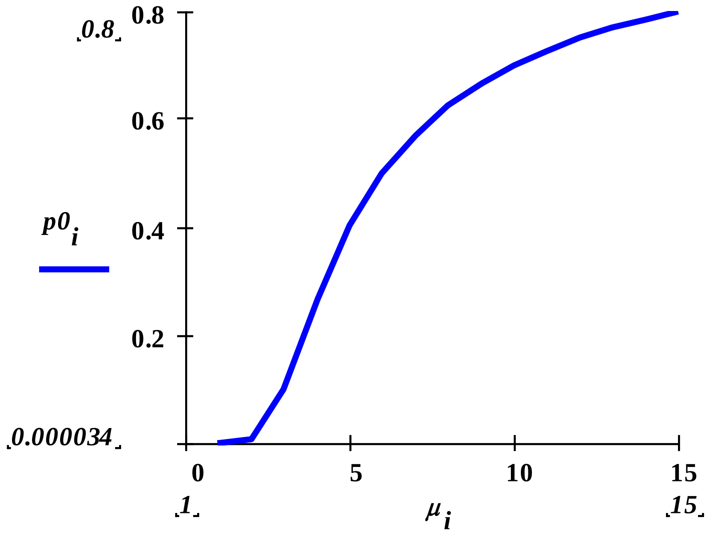
Suatu sistem antrian $M/M/1/\text{GD}/K/\infty$ laju datang $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, dan $K$=9.

Hubungan $\mu$, $\rho$, dan probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem $p_0$, dalam sistem antrian $M/M/1/\text{GD}/K/\infty$ dengan $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, dan $K$=9 tampak dalam tabel di bawah ini.

Hubungan $\mu$ dan probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem $p_0$, dalam sistem antrian $M/M/1/\text{GD}/K/\infty$ dengan $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, dan $K$=9 tampak dalam gambar di bawah ini.

**Tabel 2.6. Hubungan $\mu$, $\rho$, dan probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem $p_0$, dalam sistem antrian $M/M/1/GD/K/\infty$ dengan $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, dan $K$=9.**

| *mu* | *rho* | Prob. nol pelanggan |
|---|---|---|
| 1 | 3,00000 | 0,00003 |
| 2 | 1,50000 | 0,00882 |
| 3 | 1,00000 | 0,10000 |
| 4 | 0,75000 | 0,26492 |
| 5 | 0,60000 | 0,40243 |
| 6 | 0,50000 | 0,50049 |
| 7 | 0,42857 | 0,57155 |
| 8 | 0,37500 | 0,62503 |
| 9 | 0,33333 | 0,66668 |
| 10 | 0,30000 | 0,70000 |
| 11 | 0,27273 | 0,72727 |
| 12 | 0,25000 | 0,75000 |
| 13 | 0,23077 | 0,76923 |
| 14 | 0,21429 | 0,78571 |
| 15 | 0,20000 | 0,80000 |




**Gambar 2.8. Hubungan $\mu$ dan probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem $p_0$, dalam sistem antrian $M/M/1/GD/K/\infty$ dengan $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, dan $K$=9.**

**Hubungan $\mu$, $\rho$, *EN*, dan $EN_q$ , dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞ dengan $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, dan *K*=9 tampak dalam tabel di bawah ini.**

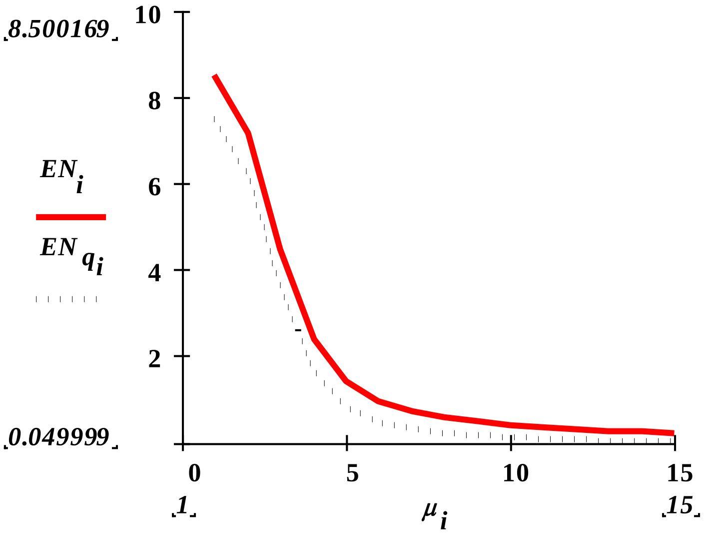
**Hubungan $\mu$, *EN*, dan $EN_q$ , dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞ dengan $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, dan *K*=9 tampak dalam gambar di bawah ini.**

**Hubungan $\mu$, $\rho$, *EW*, dan *ED*, dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞ dengan $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, dan *K*=9 tampak dalam tabel di bawah ini.**

**Hubungan $\mu$, *EW*, dan *ED*, dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞ dengan $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, dan *K*=9 tampak dalam gambar di bawah ini.**

**Tabel 2.7. Hubungan $\mu$, $\rho$, *EN*, dan $EN_q$, dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞ dengan $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, dan *K*=9.**

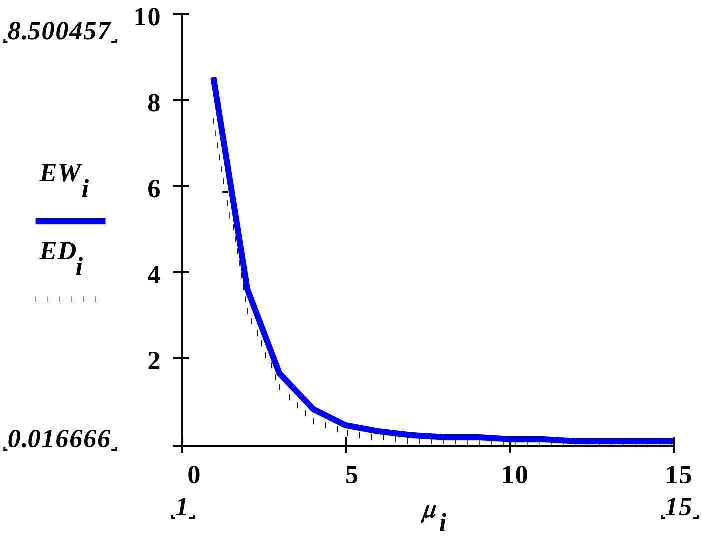
| *mu* | *rho* | *EN* | *ENq* |
|---|---|---|---|
| 1 | 3,00000 | 8,50017 | 7,50020 |
| 2 | 1,50000 | 7,17648 | 6,18530 |
| 3 | 1,00000 | 4,50000 | 3,60000 |
| 4 | 0,75000 | 2,40326 | 1,66818 |
| 5 | 0,60000 | 1,43917 | 0,84160 |
| 6 | 0,50000 | 0,99022 | 0,49071 |
| 7 | 0,42857 | 0,74791 | 0,31946 |
| 8 | 0,37500 | 0,59945 | 0,22448 |
| 9 | 0,33333 | 0,49983 | 0,16651 |
| 10 | 0,30000 | 0,42851 | 0,12852 |
| 11 | 0,27273 | 0,37498 | 0,10225 |
| 12 | 0,25000 | 0,33332 | 0,08332 |
| 13 | 0,23077 | 0,30000 | 0,06923 |
| 14 | 0,21429 | 0,27273 | 0,05844 |
| 15 | 0,20000 | 0,25000 | 0,05000 |




**Gambar 2.9. Hubungan $\mu$, *EN*, dan $EN_q$, dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞ dengan $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, dan *K*=9.**

**Tabel 2.8. Hubungan $\mu$, $\rho$, *EW*, dan *ED*, dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞ dengan $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, dan *K*=9.**

| *mu* | *rho* | *EW* | *ED* |
|---|---|---|---|
| 1 | 3,00000 | 8,50046 | 7,50046 |
| 2 | 1,50000 | 3,62018 | 3,12018 |
| 3 | 1,00000 | 1,66667 | 1,33333 |
| 4 | 0,75000 | 0,81734 | 0,56734 |
| 5 | 0,60000 | 0,48168 | 0,28168 |
| 6 | 0,50000 | 0,33040 | 0,16373 |
| 7 | 0,42857 | 0,24937 | 0,10652 |
| 8 | 0,37500 | 0,19983 | 0,07483 |
| 9 | 0,33333 | 0,16662 | 0,05550 |
| 10 | 0,30000 | 0,14284 | 0,04284 |
| 11 | 0,27273 | 0,12499 | 0,03408 |
| 12 | 0,25000 | 0,11111 | 0,02777 |
| 13 | 0,23077 | 0,10000 | 0,02308 |
| 14 | 0,21429 | 0,09091 | 0,01948 |
| 15 | 0,20000 | 0,08333 | 0,01667 |




**Gambar 2.10. Hubungan $\mu$, *EW*, dan *ED*, dalam sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞ dengan $\lambda$ sebesar tiga pelanggan per jam, dan *K*=9.**

## 2.3. RANGKUMAN

Rangkuman

- **Sistem antrian *M*/*M*/1/GD/∞/∞ yaitu sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu layannya berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang berangkat berdistribusi Poisson, jumlah pelayan sebanyak satu, disiplin pelayanan umum (*general discipline*), jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebanyak takhingga pelanggan, dan jumlah populasi pelanggan sebanyak takhingga pelanggan.**
- **Sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞ yaitu sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu layannya berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang berangkat berdistribusi Poisson, jumlah pelayan sebanyak satu, disiplin pelayanan umum (*general discipline*), jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebanyak *K* pelanggan, dan jumlah populasi pelanggan sebanyak takhingga pelanggan.**
- $p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho$
- $p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \rho^n p_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (1-\rho)\rho^n, \quad n \geq 0$
- $EN = \frac{\rho}{1-\rho}$
- $EW = EIEN = \frac{EN}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$

- $ED = \dfrac{1}{\mu(1-\rho)} - \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$
- $EN_q = \dfrac{ED}{EI} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$

## 2.4. LATIHAN

Latihan

**Latihan 2.1**

**Sistem antrian *M*/*M*/1/GD/∞/∞ mempunyai $\lambda$ sebesar delapan pelanggan per jam, sedangkan $\mu$ sebesar sepuluh pelanggan per jam.**

**a. Berapa $p_0$?**

**b. Berapa $p_7$?**

**c. Berapa probabilitasnya ada paling banyak dua pelanggan dalam sistem?**

**d. Berapa probabilitasnya ada paling sedikit dua pelanggan dalam sistem?**

**e. Berapa *EN*?**

**f. Berapa *EW*?**

**g. Berapa *ED*?**

**h. Berapa $EN_q$?**

**[Jawab : a. 0,20000, b. 0,04194, c. 0,48800, d. 0,64000, e. 4,00 pelanggan, f. 0,50 jam, g. 0,40 jam, h. 3,20 pelanggan.]**

**Latihan 2.2**

**Suatu sistem antrian *M*/*M*/1/GD/∞/∞ laju datang $\lambda$ sebesar sembilan pelanggan per jam, sedangkan laju layan $\mu$ sebesar sepuluh pelanggan per jam.**

**a. Berapa probabilitasnya tidak ada pelanggan dalam sistem?**

**b. Berapa probabilitasnya ada sebelas pelanggan dalam sistem?**

c. **Berapa probabilitasnya ada paling banyak tiga pelanggan dalam sistem?**
d. **Berapa probabilitasnya ada paling sedikit empat pelanggan dalam sistem?**
e. **Berapa ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem *EN*?**
f. **Berapa ekspektasi waktu sistem *EW*?**
g. **Berapa ekspektasi waktu antri *ED*?**
h. **Berapa ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian $EN_q$?**

**[Jawab : a. 0,10000, b. 0,03138, c. 0,34390, d. 0,65610, e. 9,00 pelanggan, f. 1,00 jam, g. 0,90 jam, h. 8,10 pelanggan.]**

**Latihan 2.3**

**Suatu tempat praktek dokter mempunyai model sistem antrian *M*/*M*/1/GD/∞/∞ laju datang $\lambda$ sebesar tiga pasien per jam, sedangkan laju layan $\mu$ sebesar empat pasien per jam.**

a. **Berapa probabilitasnya dokter tersebut sibuk dengan pasiennya baik yang sedang diperiksa maupun yang sedang menunggu untuk diperiksa?**
b. **Berapa probabilitasnya ada lima pasien dalam tempat praktek dokter tersebut?**
c. **Berapa probabilitasnya ada paling banyak satu pasien dalam tempat praktek dokter tersebut?**
d. **Berapa probabilitasnya ada pasien antara tiga pasien sampai dengan lima pasien pasien dalam tempat praktek dokter tersebut?**
e. **Berapa ekspektasi jumlah pasien per jam dalam tempat praktek dokter tersebut?**
f. **Berapa ekspektasi lamanya per pasien berada dalam tempat praktek dokter tersebut?**
g. **Berapa ekspektasi lamanya per pasien menunggu sebelum diperiksa oleh dokter tersebut?**

**h. Berapa ekspektasi jumlah pasien yang menunggu sebelum diperiksa oleh dokter tersebut?**

**i. Berapa ekspektasi jumlah pasien yang diperiksa oleh dokter tersebut?**

**[Jawab : a. 0,75000, b. 0,05933, c. 0,43750, d. 24390, e. 3,00 pasien, f. 1,00 jam, g. 0,75 jam, h. 2,25 pasien, i. 0,75 pasien.]**

**Latihan 2.4**

**Sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞ mempunyai laju datang $\lambda$ sebesar lima pelanggan per jam, laju layan $\mu$ sebesar delapan pelanggan per jam, sedangkan *K*=7.**

**a. Berapa $p_0$ ?**

**b. Berapa $p_4$ ?**

**c. Berapa *EN* ?**

**d. Berapa *EW* ?**

**e. Berapa *ED* ?**

**f. Berapa $EN_q$ ?**

**[Jawab : a. 0,38394, b. 0,05858 c. 1,47596 pelanggan, d. 0,29948 jam, e. 0,17448 jam, f. 0,85990 pelanggan]**

**Latihan 2.5**

**Sistem antrian *M*/*M*/1/GD/*K*/∞ mempunyai laju datang $\lambda$ sebesar lima pelanggan per jam, laju layan $\mu$ sebesar delapan pelanggan per jam, sedangkan *K*=1, 2, …,5.**

**a. Berapa $p_0$ ?**

**b. Berapa *EN* ?**

**[Jawab : a. 0,61538; 0,49612; 0,44252; 0,41453; 0,39877 b. 0,38462 pelanggan; 0,69767 pelanggan; 0,94641 pelanggan; 1,13956 pelanggan; 1,28637 pelanggan]**

## 2.5. UMPAN BALIK

Umpan balik

- Cocokkan hasil jawaban Anda dari latihan-latihan diatas dengan kunci jawaban, kemudian hitung tingkat pemguasaan Anda dengan rumus

  Tingkat penguasaan =

$$\frac{\text{Jumlah jawaban latihan yang benar}}{\text{Jumlah latihan}} \times 100\%$$

- Arti besarnya tingkat penguasaan :

$90\% \leq \text{Tingkat penguasaan} \leq 100\%$ = Baik sekali

$80\% \leq \text{Tingkat penguasaan} < 90\%$ = Baik

$70\% \leq \text{Tingkat penguasaan} < 80\%$ = Cukup

$0\% \leq \text{Tingkat penguasaan} < 70\%$ = Kurang

- Jika skor yang Anda peroleh sebesar 80% atau lebih maka Anda dapat meneruskan ke modul berikutnya. Apabila skor yang Anda peroleh kurang dari 80% maka bacalah kembali materi modul ini, terutama hal-hal yang belum Anda kuasai!

## 2.6. DAFTAR PUSTAKA

Daftar pustaka


1. Gross, D., Carl M. Harris (1974). *Fundamentals of Queueing Theory*. New York : John Wiley & Sons, Inc.
2. Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems, Volume I : Theory*. New York : John Wiley & Sons, Inc.
3. Wolff, Ronald W. (1989). *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*. Englewood Cliffs : Prentice Hall, Inc.