MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN *M*/*M*/*c*/GD/∞/∞
TINGKAT ASPIRASI

JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

Oleh: Dr. Ir. H. Muhammad Sutarno, S.H.I., M.Sc., M.Ag.

$\lambda \equiv 7$ Laju datang pelanggan per jam

$\mu \equiv 8$ Laju layan pelanggan per jam

$w \equiv 0.24$ Batas atas ekspektasi waktu berada dalam sistem *EW* yang menjadi (*waktu*) tingkat aspirasi pelanggan.

$EW \le w$

Jumlah pelayan menganggur rata-rata dalam sistem (dalam *c* pelayan), yaitu pada keadaan di mana dalam sistem ada 0, 1, 2, ..., *c*-1 pelanggan, sebesar

$$JPMR = (c-0)\cdot p(0,c) + (c-1)\cdot p(1,c) + \ldots + [c-(c-1)]\cdot p(c-1,c)$$

Proporsi pelayan menganggur rata-rata dalam sistem (yaitu dalam *c* pelayan), sebesar

$$PPMR = \frac{(c-0)\cdot p(0,c) + (c-1)\cdot p(1,c) + \ldots + [c-(c-1)]\cdot p(c-1,c)}{c}$$

Persentase pelayan menganggur rata-rata per pelayan, sebesar (dalam satuan persen, yang berarti juga persentase waktu pelayan menganggur rata-rata per pelayan)

$$PersenPMRPP = \frac{(c-0)\cdot p(0,c) + (c-1)\cdot p(1,c) + \ldots + [c-(c-1)]\cdot p(c-1,c)}{c}\cdot 100$$

$\tau \equiv 71$ Batas atas persentase pelayan menganggur rata-rata per pelayan yang menjadi tingkat aspirasi pelayan (dalam satuan persen), yaitu pada keadaan di mana dalam sistem ada 0, 1, 2, ..., *c*-1 pelanggan. Artinya

$PersenPMRPP \le \tau$

Jumlah pelayan minimum:

$$c_{min} \equiv \begin{cases} ceil\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 1 & \text{if } ceil\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu} \\ ceil\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$c_{min} = 1$

Untuk perhitungan ini, dibuat batas atas jumlah pelayan:

$c_{atas} \equiv 10$

Untuk perhitungan ini, rentang jumlah pelayannya dari c_{min} sampai dengan c_{atas}.

$c := c_{min} .. c_{atas}$

Vektor jumlah pelayan:

$VJP_c := c$

Faktor utilisasi / intensitas lalu lintas:

$$\rho(\lambda, \mu, c) := \begin{cases} \dfrac{\lambda}{c \cdot \mu} & \text{if } 0 < \dfrac{\lambda}{c \cdot \mu} < 1 \\ \text{"Tidak didefinisikan"} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem:

$$p_o(c) := \begin{cases} \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \left[\frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{c!} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \cdot \left(\frac{c \cdot \mu}{c \cdot \mu - \lambda}\right)} & \text{if } 0 < \dfrac{\lambda}{c \cdot \mu} < 1 \\ \text{"Tidak didefinisikan"} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Probabilitas ada n pelanggan dalam sistem:

$$p(n, c) := \begin{cases} \text{if } 0 < \dfrac{\lambda}{c \cdot \mu} < 1 & \begin{cases} \dfrac{1}{n!} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p_o(c) & \text{if } n \le c \\ \dfrac{1}{c! \cdot c^{n-c}} \cdot \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p_o(c) & \text{otherwise} \end{cases} \\ \text{"Tidak didefinisikan"} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Ekpektasi jumlah pelanggan dalam sistem

$$EN(\lambda, \mu, c) := \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu} + \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \cdot \lambda \cdot \mu}{(c-1)! \cdot (c \cdot \mu - \lambda)^2} \cdot p_o(c) & \text{if } 0 < \dfrac{\lambda}{c \cdot \mu} < 1 \\ \text{"Tidak didefinisikan"} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Ekspektasi waktu pelanggan dalam sistem:

$$EkspW(c) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \cdot EN(\lambda, \mu, c) & \text{if } 0 < \frac{\lambda}{c \cdot \mu} < 1 \\ \text{"Tidak didefinisikan"} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Mengubah ekspektasi waktu pelanggan dalam sistem *EkspW* menjadi vektor *EW*:

$$EW_c := EkspW(c)$$

$w = 0.240$

$c =$	$EN(\lambda, \mu, c)$	$EkspW(c)$
1	7.000	1.000
2	1.082	0.155
3	0.902	0.129
4	0.879	0.126
5	0.875	0.125
6	0.875	0.125
7	0.875	0.125
8	0.875	0.125
9	0.875	0.125
10	0.875	0.125

Vektor jumlah pelayan:

$$VJP_c := c$$

$c =$	$VJP_c =$	$EW_c =$
1	1	1.000
2	2	0.155
3	3	0.129
4	4	0.126
5	5	0.125
6	6	0.125
7	7	0.125
8	8	0.125
9	9	0.125
10	10	0.125

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN $M/M/c/GD/\infty/\infty$
TINGKAT ASPIRASI
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

$$PersenPMRPP(c) := \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} [(c-n)\cdot p(n,c)]}{c}\cdot 100$$

Mrngubah *PersenPMRPP* menjadi vektor *PersentasePMRPP*:

$$PersentasePMRPP_c := PersenPMRPP(c)$$

$augment(VJP, EW) =$

	1	2
1	1	1
2	2	0.155
3	3	0.129
4	4	0.126
5	5	0.125
6	6	0.125
7	7	0.125
8	8	0.125
9	9	0.125
10	10	0.125

$$MJPDEW := augment(VJP, EW)$$

$$MJPDEWYMMP(M, w) := \left| \begin{array}{l} c \leftarrow c_{min} \\ \text{while } \left(M^{\langle c_{min}+1\rangle}\right)_c > w \\ \quad c \leftarrow c+1 \\ submatrix\left[M, c, rows(M), c_{min}, \left(c_{min}+1\right)\right] \end{array} \right.$$

$$MJPDPPMRPP := augment(VJP, PersentasePMRPP)$$

$$MJPDPersentaseM(M, \tau) := \left| \begin{array}{l} c \leftarrow c_{min} \\ \text{while } \left(M^{\langle c_{min}+1\rangle}\right)_c \leq \tau \\ \quad c \leftarrow c+1 \\ submatrix\left[M, c_{min}, (c-1), c_{min}, \left(c_{min}+1\right)\right] \end{array} \right.$$

$M2 := MJPDPersentaseM(MJPDPPMRPP, \tau)$

$$M2 = \begin{pmatrix} 1 & 12.5 \\ 2 & 56.25 \\ 3 & 70.833 \end{pmatrix} \qquad MJPDPersentaseM(MJPDPPMRPP, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & 12.5 \\ 2 & 56.25 \\ 3 & 70.833 \end{pmatrix}$$

Matriks jumlah pelayan dan *EW* yang memenuhi persyaratan $EW \le w$

$M1 := MJPDEWYMMP(MJPDEW, w)$ $\qquad w = 0.240$

$$M1 = \begin{pmatrix} 2 & 0.155 \\ 3 & 0.129 \\ 4 & 0.126 \\ 5 & 0.125 \\ 6 & 0.125 \\ 7 & 0.125 \\ 8 & 0.125 \\ 9 & 0.125 \\ 10 & 0.125 \end{pmatrix} \qquad MJPDEWYMMP(MJPDEW, w) = \begin{pmatrix} 2 & 0.155 \\ 3 & 0.129 \\ 4 & 0.126 \\ 5 & 0.125 \\ 6 & 0.125 \\ 7 & 0.125 \\ 8 & 0.125 \\ 9 & 0.125 \\ 10 & 0.125 \end{pmatrix}$$

Matriks jumlah pelayan dan *EW* yaitu *MJPDEW*

$MJPDEW =$

	1	2
1	1	1
2	2	0.155
3	3	0.129
4	4	0.126
5	5	0.125
6	6	0.125
7	7	0.125
8	8	0.125
9	9	0.125
10	10	0.125

$w = 0.240$

Matriks jumlah pelayan dan *EW* yang memenuhi persyaratan $EW \le w$

$$w = 0.240$$

$MJPDEWYMMP(MJPDEW, w) =$

	1	2
1	2	0.155
2	3	0.129
3	4	0.126
4	5	0.125
5	6	0.125
6	7	0.125
7	8	0.125
8	9	0.125
9	10	0.125

$MJPDEW =$

	1	2
1	1	1
2	2	0.155
3	3	0.129
4	4	0.126
5	5	0.125
6	6	0.125
7	7	0.125
8	8	0.125
9	9	0.125
10	10	0.125

Persentase pelayan menganggur rata-rata per pelayan, sebesar (dalam satuan persen, yang berarti juga persentase waktu pelayan menganggur rata-rata per pelayan)

$$PersenPMRPP = \frac{(c-0)\cdot p(0,c) + (c-1)\cdot p(1,c) + \ldots + [c-(c-1)]\cdot p(c-1,c)}{c}\cdot 100$$

atau

$$PersenPMRPP(c) = \frac{\sum_{n=0}^{c-1} [(c-n)\cdot p(n,c)]}{c}\cdot 100$$

Mrngubah *PersenPMRPP* menjadi vektor *PersentasePMRPP*:

$PersentasePMRPP_c := PersenPMRPP(c)$

$c =$

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

$PersenPMRPP(c)$

12.50
56.25
70.83
78.13
82.50
85.42
87.50
89.06
90.28
91.25

$PersentasePMRPP_c$

12.50
56.25
70.83
78.13
82.50
85.42
87.50
89.06
90.28
91.25

$w = 0.240$

$\tau = 71$

Matriks jumlah pelayan dan *PersentasePMRPP* dinotasikan dengan *MJPDPPMRPP*:

$MJPDPPMRPP =$

	1	2
1	1	12.5
2	2	56.25
3	3	70.833
4	4	78.125
5	5	82.5
6	6	85.417
7	7	87.5
8	8	89.062
9	9	90.278
10	10	91.25

Matriks jumlah pelayan dan Persentase menganggur ... yang memenuhi persyaratan

$PersentaseMenganggurPelayan \leq \tau$

dinotasikan dengan *MJPDPersentaseM*:

$$MJPDPersentaseM(MJPDPPMRPP, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & 12.5 \\ 2 & 56.25 \\ 3 & 70.833 \end{pmatrix}$$

Matriks jumlah pelayan dan *EW* yang memenuhi persyaratan $EW \le w$

$w = 0.240$

$$MJPDEWYMMP(MJPDEW, w) = \begin{pmatrix} 2 & 0.155 \\ 3 & 0.129 \\ 4 & 0.126 \\ 5 & 0.125 \\ 6 & 0.125 \\ 7 & 0.125 \\ 8 & 0.125 \\ 9 & 0.125 \\ 10 & 0.125 \end{pmatrix}$$

Sedangkan matriks jumlah pelayan dan Persentase menganggur ... yang memenuhi persyaratan

$PersentaseMenganggurPelayan \le \tau$

dinotasikan dengan *MJPDPersentaseM*:

$$MJPDPersentaseM(MJPDPPMRPP, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & 12.5 \\ 2 & 56.25 \\ 3 & 70.833 \end{pmatrix}$$

maka jumlah pelayan optimal berdasarkan model keputusan antrian tingkat aspirasi sebesar:

$$c_{OptAsp}(M2, M1) := \left| \begin{array}{l} V2 \leftarrow M2^{\langle c_{min} \rangle} \\ V1 \leftarrow M1^{\langle c_{min} \rangle} \\ V3 \leftarrow V2 \otimes V1 \\ \text{"Tidak ada c yang memenuhi tingkat aspirasi"} \ \ if \ \ V3 = (\text{"Peristiwa mustahil"}) \\ V3 \ \ otherwise \end{array} \right.$$

$$c_{OptAsp}(MJPDPersentaseM(MJPDPPMRPP, \tau), MJPDEWYMMP(MJPDEW, w)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$