

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN $M/M/c/GD/\infty/\infty$
GABUNGAN MODEL TINGKAT ASPIRASI & ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN $M/M/c/GD/\infty/\infty$
GABUNGAN MODEL TINGKAT ASPIRASI & ONGKOS

JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

Oleh: Dr. Ir. H. Muhammad Sutarno, S.H.I., M.Sc., M.Ag.

$$\lambda \equiv 125$$

Laju datang pelanggan per jam

$$\mu \equiv 10$$

Laju layan pelanggan per jam

$$ES \equiv \frac{1}{\mu}$$

Ekspektasi waktu layan jam per pelanggan

$$ES = 0.1$$

$$\Delta_{EW} \equiv 0.15$$

Tambahan untuk ekspektasi waktu layan sehingga menjadi batas atas ekspektasi waktu berada dalam sistem EW yang menjadi (*waktu*) tingkat aspirasi pelanggan

$$w \equiv ES + \Delta_{EW}$$

Batas atas ekspektasi waktu berada dalam sistem EW yang menjadi (*waktu*) tingkat aspirasi pelanggan, artinya:

$$w = 0.25$$

$$EW \leq w$$

$$\tau \equiv 30$$

Batas atas persentase menganggur pelayan rata-rata per pelayan yang menjadi tingkat aspirasi pelayan (dalam satuan persen),

$$\text{PersentaseMenganggurPelayan} \leq \tau$$

yaitu pada keadaan di mana dalam sistem ada 0, 1, 2, ..., $c-1$ pelanggan. Di mana

$JPMR$

Jumlah pelayan menganggur rata-rata dalam sistem (dalam c pelayan), yaitu pada keadaan di mana dalam sistem ada 0, 1, 2, ..., $c-1$ pelanggan, sebesar

$$(c - 0) p(0, c) + (c - 1) p(1, c) + \dots + [c - (c - 1)] p(c - 1, c)$$

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN $M/M/c/GD/\infty/\infty$
GABUNGAN MODEL TINGKAT ASPIRASI & ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

PPMR Proporsi pelayan mengganggu rata-rata dalam sistem (yaitu dalam c pelayan), sebesar

$$\frac{(c-0) p(0, c) + (c-1) p(1, c) + \dots + [c - (c-1)] p(c-1, c)}{c}$$

PersenPMRPP Persentase pelayan mengganggu rata-rata per pelayan, sebesar (dalam satuan persen, yang berarti juga persentase waktu pelayan mengganggu rata-rata per pelayan)

$$\frac{(c-0) p(0, c) + (c-1) p(1, c) + \dots + [c - (c-1)] p(c-1, c)}{c} \cdot 100$$

$a \equiv 3$ $\text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = 13$

$$c_{min} \equiv \begin{cases} \text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 1 & \text{if } \text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu} \\ \text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$c_{min} = 13$$

ORIGIN $\equiv c_{min}$

$c_{atas} \equiv a \cdot c_{min}$ $I := c_{atas}$ $a = 3$ $c_{min} = 13$

$c_w := c_{min} \cdot c_{atas}$ Jumlah pelayan

Vektor jumlah pelayan:

$$VJP_c := c$$

Faktor utilisasi / intensitas lalu lintas:

$$\rho(\lambda, \mu, c) := \frac{\lambda}{c \mu}$$

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN $M/M/c/GD/\infty/\infty$
GABUNGAN MODEL TINGKAT ASPIRASI & ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

$O_1 \equiv 11000$ Ongkos pelayanan per pelayan per jam

$O_2 \equiv 25000$ Ongkos per pelanggan dalam sistem per jam

Probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem:

$$p_0(c) := \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \left[\frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] + \frac{1}{c!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \left(\frac{c \mu}{c \mu - \lambda} \right)}$$

$$p(n, c) := \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} p_0(c) & \text{if } n \leq c \\ \frac{\lambda^n}{c! c^{n-c} \mu^n} p_0(c) & \text{otherwise} \end{cases}$$

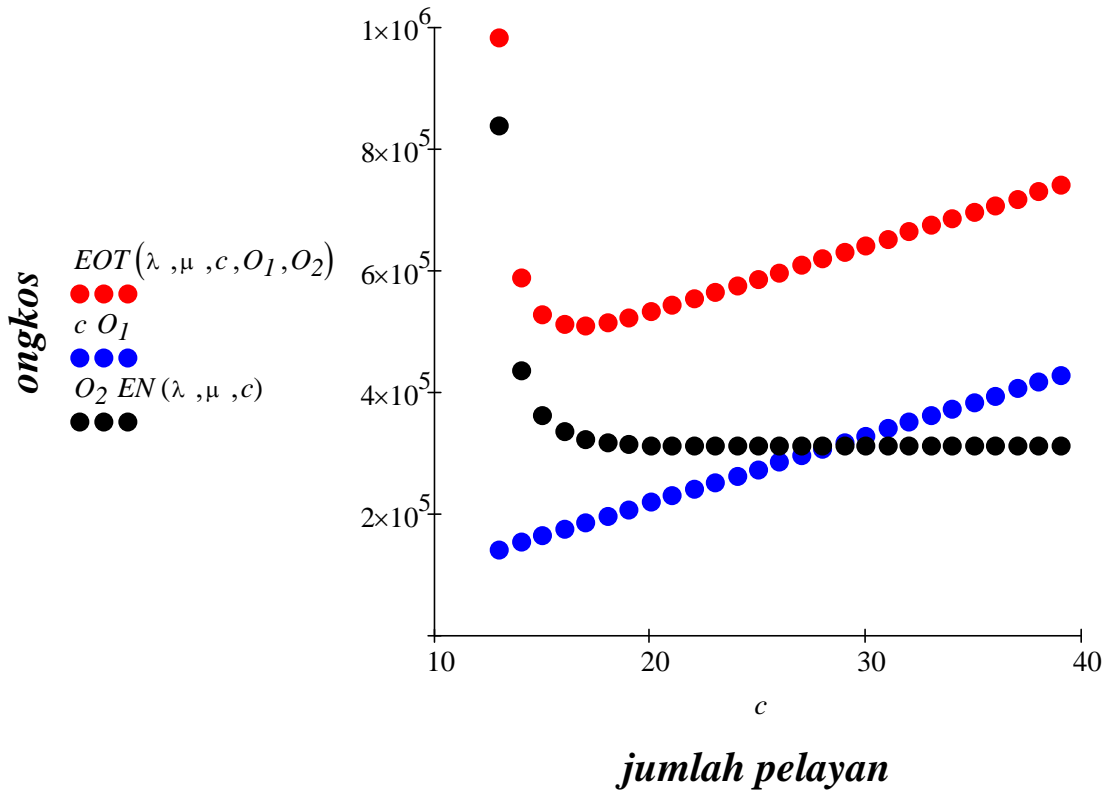
Ekpektasi jumlah pelanggan dalam sistem:

$$EN(\lambda, \mu, c) := \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^c \lambda \mu}{(c-1)! (c \mu - \lambda)^2} p_0(c)$$

Ekspektasi ongkos total:

$$EOT(\lambda, \mu, c, O_1, O_2) := c O_1 + O_2 EN(\lambda, \mu, c)$$

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN $M/M/c/GD/\infty/\infty$
GABUNGAN MODEL TINGKAT ASPIRASI & ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL



$O_1 = 11000$ $O_2 = 25000$

$c =$	$c O_1 =$	$O_2 EN(\lambda, \mu, c)$	$EOT(\lambda, \mu, c, O_1, O_2)$	$\rho(\lambda, \mu, c)$
13	143000	840657.141	983657.141	0.962
14	154000	435622.408	589622.408	0.893
15	165000	362662.763	527662.763	0.833
16	176000	336080.807	512080.807	0.781
17	187000	324180.026	511180.026	0.735
18	198000	318381.409	516381.409	0.694
19	209000	315456.972	524456.972	0.658
20	220000	313969.12	533969.12	0.625
21	231000	313216.72	544216.72	0.595
22	242000	312841.949	554841.949	0.568
23	253000	312659.134	565659.134	0.543
24	264000	312572.117	576572.117	0.521
25	275000	312531.795	587531.795	0.5
...

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN $M/M/c/GD/\infty/\infty$
GABUNGAN MODEL TINGKAT ASPIRASI & ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

$c_{min} = 13$ $c := c_{min} .. c_{atas}$

Ekspektasi waktu pelanggan dalam sistem:

$EkspW(c) := \frac{1}{\lambda} EN(\lambda, \mu, c)$ $c =$ $EN(\lambda, \mu, c)$ $EkspW(c)$ $w = 0.25$

$EW_c := EkspW(c)$

13	33.626	0.269
14	17.425	0.139
15	14.507	0.116
16	13.443	0.108
17	12.967	0.104
18	12.735	0.102
19	12.618	0.101
20	12.559	0.100
21	12.529	0.100
22	12.514	0.100
23	12.506	0.100
24	12.503	0.100
25	12.501	0.100
26	12.501	0.100
27	12.5	0.100
...

Vektor jumlah pelayan: $VJP_c := c$

$c =$	$EW_c =$		13
13	0.269	13	13
14	0.139	14	14
15	0.116	15	15
16	0.108	16	16
17	0.104	17	17
18	0.102	18	18
19	0.101	19	19
20	0.1	20	20
21	0.1	21	21
22	0.1	22	22
23	0.1	23	23
24	0.1	24	24
25	0.1	25	25
26	0.1	26	26
27	0.1	27	27
...	...	28	...

$VJP_c =$

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN $M/M/c/GD/\infty/\infty$
GABUNGAN MODEL TINGKAT ASPIRASI & ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

Matriks jumlah pelayan dan EW : $MJPDEW := augment(VJP, EW)$

$MJPDEW =$

	13	14
13	13	0.269
14	14	0.139
15	15	0.116
16	16	0.108
17	17	0.104
18	18	0.102
19	19	0.101
20	20	0.1
21	21	0.1
22	22	0.1
23	23	0.1
24	24	0.1
25	25	0.1
26	26	0.1
27	27	0.1
28	28	...

Matriks jumlah pelayan dan EW yang memenuhi persyaratan $EW \leq w$

$MJPDEWYMMP(M, w) :=$

```

c ← cmin
while (M(cmin+1))c > w
    c ← c + 1
submatrix[M, c, catas, cmin, (cmin + 1)]
    
```

$MJPDEWYMMP(MJPDEW, w) =$

	13	14
13	14	0.139
14	15	0.116
15	16	0.108
16	17	0.104
17	18	0.102
18	19	0.101
19	20	0.1
20	21	0.1
21	22	0.1
22	23	0.1
23	24	0.1
24	25	0.1
25	26	0.1
26	27	0.1
27	28	0.1
28	29	...

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN $M/M/c/GD/\infty/\infty$
GABUNGAN MODEL TINGKAT ASPIRASI & ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

PersenPMRPP Persentase pelayan mengganggu rata-rata per pelayan, sebesar (dalam satuan persen, yang berarti juga persentase waktu pelayan mengganggu rata-rata per pelayan)

$$\frac{(c-0) p(0, c) + (c-1) p(1, c) + \dots + [c - (c-1)] p(c-1, c)}{c} \cdot 100$$

$$PersenPMRPP(c) := \frac{\sum_{n=0}^{c-1} [(c-n) p(n, c)]}{c} \cdot 100$$

PersentasePMRPP_c := *PersenPMRPP(c)*

c = *PersenPMRPP(c)*

13	3.85
14	10.71
15	16.67
16	21.88
17	26.47
18	30.56
19	34.21
20	37.50
21	40.48
22	43.18
23	45.65
24	47.92
25	50.00
26	51.92
27	53.70
...	...

$\tau = 30$

$w = 0.25$

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN $M/M/c/GD/\infty/\infty$
GABUNGAN MODEL TINGKAT ASPIRASI & ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

Matriks jumlah pelayan dan *PersentasePMRPP*:

$$MJDPPMRPP := \text{augment}(VJP, \text{PersentasePMRPP})$$

	13	14
13	13	3.846
14	14	10.714
15	15	16.667
16	16	21.875
17	17	26.471
18	18	30.556
19	19	34.211
20	20	37.5
21	21	40.476
22	22	43.182
23	23	45.652
24	24	47.917
25	25	50
26	26	51.923
27	27	53.704
28	28	...

Matriks jumlah pelayan dan Persentase mengganggu ... yang memenuhi persyaratan

$$\text{PersentaseMenggangguPelayan} \leq \tau$$

$$MJDPPersentaseM(M, \tau) := \begin{array}{l} c \leftarrow c_{min} \\ \text{while } \left(M^{(c_{min}+1)} \right)_c \leq \tau \\ \quad c \leftarrow c + 1 \\ \text{submatrix}[M, c_{min}, (c - 1), c_{min}, (c_{min} + 1)] \end{array}$$

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN $M/M/c/GD/\infty/\infty$
GABUNGAN MODEL TINGKAT ASPIRASI & ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

Matriks jumlah pelayan dan Persentase menganggur ... yang memenuhi persyaratan

$$PersentaseManganggurPelayan \leq \tau$$

$$MJPDPersentaseM (MJPDPPMRPP, \tau) = \begin{pmatrix} 13 & 3.846 \\ 14 & 10.714 \\ 15 & 16.667 \\ 16 & 21.875 \\ 17 & 26.471 \end{pmatrix}$$

$$M2 := MJPDPersentaseM (MJPDPPMRPP, \tau)$$

Matriks jumlah pelayan dan EW yang memenuhi persyaratan $EW \leq w$

	13	14
13	14	0.139
14	15	0.116
15	16	0.108
16	17	0.104
17	18	0.102
18	19	0.101
19	20	0.1
20	21	0.1
21	22	0.1
22	23	0.1
23	24	0.1
24	25	0.1
25	26	0.1
26	27	0.1
27	28	0.1
28	29	...

$$M1 := MJPDEWYMMMP(MJPDEW, w)$$

**MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN $M/M/c/GD/\infty/\infty$
GABUNGAN MODEL TINGKAT ASPIRASI & ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL**

$$c_{OptAsp}(M2, M1) := \begin{cases} V2 \leftarrow M2^{\langle c_{min} \rangle} \\ V1 \leftarrow M1^{\langle c_{min} \rangle} \\ V3 \leftarrow V2 \otimes V1 \\ \text{"Tidak ada } c \text{ yang memenuhi tingkat aspirasi" if } V3 = (\text{"Peristiwa mustahil"}) \\ V3 \text{ otherwise} \end{cases}$$

$$c_{OptAsp}(MJPDPersentaseM(MJPDPPMRPP, \tau), MJPDEWYMMMP(MJPDEW, w)) = \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$c_{OptAsp}(M2, M1) = \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$M2 = \begin{pmatrix} 13 & 3.846 \\ 14 & 10.714 \\ 15 & 16.667 \\ 16 & 21.875 \\ 17 & 26.471 \end{pmatrix}$$

	13	14
13	14	0.139
14	15	0.116
15	16	0.108
16	17	0.104
17	18	0.102
18	19	0.101
19	20	0.1
20	21	0.1
21	22	0.1
22	23	0.1
23	24	0.1
24	25	0.1
25	26	0.1
26	27	0.1
27	28	0.1
28	29	...

$$O_1 = 11000$$

$$O_2 = 25000$$

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN $M/M/c/GD/\infty/\infty$
GABUNGAN MODEL TINGKAT ASPIRASI & ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

$c =$ $EOT(\lambda, \mu, c, O_1, O_2)$

13	983657.141
14	589622.408
15	527662.763
16	512080.807
17	511180.026
18	516381.409
19	524456.972
20	533969.12
21	544216.72
22	554841.949
23	565659.134
24	576572.117
25	587531.795
...	...

$$c_{OptAsp}(M2, M1) = \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$c_{OptAsp}(M2, M1)_{c_{min}} = 14$$

$$c_{OptAsp}(M2, M1)_{ORIGIN} = 14$$

$$last(c_{OptAsp}(M2, M1)) = 16$$

$$v_{cOptAsp} := c_{OptAsp}(M2, M1)$$

Vektor c optimal model tingkat aspirasi saja

$$v_{cOptAsp} = \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Vektor ekspektasi ongkos total untuk c optimal model tingkat aspirasi saja:

$$v_{EOTcOptAsp}(v) := \begin{array}{l} \text{for } i \in ORIGIN .. last(v) \\ \quad v_{EOT}_i \leftarrow EOT(\lambda, \mu, v_i, O_1, O_2) \\ v_{EOT} \end{array}$$

$$v_{EOTcOptAsp}(v_{cOptAsp}) = \begin{pmatrix} 589622.408 \\ 527662.763 \\ 512080.807 \\ 511180.026 \end{pmatrix}$$

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN $M/M/c/GD/\infty/\infty$
GABUNGAN MODEL TINGKAT ASPIRASI & ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

Ekspektasi ongkos total minimum model tingkat aspirasi dan ongkos:

$$\min(v_{EOTcOptAsp}(v_{cOptAsp})) = 511180.026$$

Perhatikan:

$$augment(v_{cOptAsp}, v_{EOTcOptAsp}(v_{cOptAsp})) = \begin{pmatrix} 14 & 589622.408 \\ 15 & 527662.763 \\ 16 & 512080.807 \\ 17 & 511180.026 \end{pmatrix}$$

$$M3 := augment(v_{cOptAsp}, v_{EOTcOptAsp}(v_{cOptAsp}))$$

$$lookup(\min(v_{EOTcOptAsp}(v_{cOptAsp})), M3^{\langle ORIGIN+1 \rangle}, M3^{\langle ORIGIN \rangle}) = (17)$$

Jumlah pelayan optimal model tingkat aspirasi dan ongkos:

$$c_{OptGabungan}(M3) := lookup(\min(v_{EOTcOptAsp}(v_{cOptAsp})), M3^{\langle ORIGIN+1 \rangle}, M3^{\langle ORIGIN \rangle})_{ORIGIN}$$

$$c_{OptGabungan}(M3) = 17$$