MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN $G/G/c/GD/\infty/\infty$
MODEL ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

Oleh: Dr. Ir. H. Muhammad Sutarno, S.H.I., M.Sc., M.Ag.

Sistem antrian dengan waktu antardatang *General*, waktu layan *General,* jumlah pelayan paralel sebesar *c,* disiplin antrian *General Discipline,* jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebanyak takhingga, dan jumlah populasi pelanggan takhingga.

Data mentah variabel acak waktu antar datang T dan data mentah variabel acak waktu layan S dalam satuan jam/pelanggan:

$$T \equiv \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.5 \end{pmatrix} \frac{jam}{pelanggan} \qquad S \equiv \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.3 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{pmatrix} \frac{jam}{pelanggan}$$

Ekspektasi waktu antardatang pelanggan ET dihitung dari *mean* atau rata-rata variabel acak T:

$$ET \equiv mean(T)$$

$$ET = 0.3 \frac{jam}{pelanggan}$$

Momen kedua T dinotasikan dengan ET^2:

$$ET^2 \equiv \frac{\sum_{i=ORIGIN}^{rows(T)+ORIGIN-1} (T_i)^2}{rows(T)} \qquad ORIGIN = 1$$

$$ET^2 = 0.10333 \frac{jam^2}{pelanggan^2}$$

$rows(T) = 6$ $ORIGIN = 1$

$T =$

	1
1	0.4
2	0.2
3	0.3
4	0.2
5	0.2
6	0.5

$\frac{jam}{pelanggan}$

$T^2 =$

	1
1	0.16
2	0.04
3	0.09
4	0.04
5	0.04
6	0.25

$\frac{jam^2}{pelanggan^2}$

$$\sum_{i = ORIGIN}^{rows(T)+ORIGIN-1} (T_i)^2 = 0.62 \frac{jam^2}{pelanggan^2}$$

Variansi T:

$VT \equiv ET^2 - (ET)^2$

$$VT = 0.01333 \frac{jam^2}{pelanggan^2}$$

$$ET^2 = 0.10333 \frac{jam^2}{pelanggan^2}$$

$$ET = 0.3 \frac{jam}{pelanggan} \qquad (ET)^2 = 0.09 \frac{jam^2}{pelanggan^2}$$

Waktu layan S:

$S =$

	1
1	0.2
2	0.1
3	0.1
4	0.3
5	0.2
6	0.1

$\frac{jam}{pelanggan}$

Ekspektasi waktu layan *ES* dihitung dari *mean* atau rata-rata variabel acak *S*:

$ES \equiv mean(S)$

$$ES = 0.16667 \frac{jam}{pelanggan}$$

$$S = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & 0.2 \\ \hline 2 & 0.1 \\ \hline 3 & 0.1 \\ \hline 4 & 0.3 \\ \hline 5 & 0.2 \\ \hline 6 & 0.1 \\ \hline \end{array} \frac{jam}{pelanggan}$$

Momen kedua *S* dinotasikan dengan ES^2:

$$ES^2 \equiv \frac{\sum_{i\,=\,ORIGIN}^{rows(S)+ORIGIN-1} (S_i)^2}{rows(S)}$$

$$ES^2 = 0.03333 \frac{jam^{\,2}}{pelanggan^{\,2}}$$

$rows(S) = 6$ $\qquad$ $ORIGIN = 1$

$$S = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & 0.2 \\ \hline 2 & 0.1 \\ \hline 3 & 0.1 \\ \hline 4 & 0.3 \\ \hline 5 & 0.2 \\ \hline 6 & 0.1 \\ \hline \end{array} \frac{jam}{pelanggan} \qquad S^2 = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1 \\ \hline 1 & 0.04 \\ \hline 2 & 0.01 \\ \hline 3 & 0.01 \\ \hline 4 & 0.09 \\ \hline 5 & 0.04 \\ \hline 6 & 0.01 \\ \hline \end{array} \frac{jam^{\,2}}{pelanggan^{\,2}}$$

Variansi *S*:

$$VS = ES^2 - (ES)^2$$

$$VS = 5.55556 \times 10^{-3} \frac{jam^2}{pelanggan^2}$$

$$ES^2 = 0.03333 \frac{jam^2}{pelanggan^2}$$

$$ES = 0.16667 \frac{jam}{pelanggan} \qquad (ES)^2 = 0.02778 \frac{jam^2}{pelanggan^2}$$

λ menyatakan laju datang (*arrival rate*) yaitu jumlah pelanggan yang datang rata-rata per satuan waktu:

$$\lambda \equiv \frac{1}{ET}$$

$$\lambda = 3.33333 \frac{pelanggan}{jam}$$

$$ET = 0.3 \frac{jam}{pelanggan}$$

Laju datang rata-rata effektif:

$$\lambda_{eff} \equiv \lambda$$

$$\lambda_{eff} = 3.33333 \frac{pelanggan}{jam}$$

μ menyatakan laju layan yaitu jumlah pelanggan yang telah dilayani rata-rata per satuan waktu:

$$\mu \equiv \frac{1}{ES}$$

$$\mu = 6 \frac{pelanggan}{jam} \qquad ES = 0.16667 \frac{jam}{pelanggan}$$

Ongkos pelayanan per pelayan per satuan waktu:

$$O_I \equiv 30000 \frac{Rp}{jam \ \ pelayan}$$

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN *G/G/c*/GD/∞/∞
MODEL ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

Ongkos (*nilai*) per pelanggan dalam sistem per satuan waktu:

$$O_2 \equiv 3000000 \frac{Rp}{jam \ \ pelanggan}$$

Jmumlah pelayan minimum:

$$c_{min}(\lambda, \mu) \equiv \begin{cases} \left(ceil\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 1\right) pelayan & if \ \ ceil\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu} \\ \left(ceil\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right) pelayan & otherwise \end{cases}$$

$$c_{min}(\lambda, \mu) = 1 \, pelayan$$

$$ceil\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = 1$$

$$ORIGIN \equiv \frac{c_{min}(\lambda, \mu)}{pelayan}$$

$$konstanta \equiv 7$$

$$c_{atas}(\lambda, \mu) \equiv konstanta \ \ c_{min}(\lambda, \mu)$$

Jumlah pelayan paralel:

$$c = c_{min}(\lambda, \mu), \left(c_{min}(\lambda, \mu) + 1 \ pelayan\right) .. c_{atas}(\lambda, \mu)$$

$$c_{min}(\lambda, \mu) = 1 \, pelayan$$

$$c_{atas}(\lambda, \mu) = 7 \, pelayan$$

Faktor utilisasi / intensitas lalu lintas:

$$\rho(\lambda, \mu, c) = \frac{\lambda}{c \ \mu}$$

Ekspektasi ongkos total sistem antrian per satuan waktu untuk jumlah pelayan *c*:

$$EOT_{GGcGD}(\lambda, \mu, c, O_1, O_2) = EOO_{GGcGD}(c, O_1) + EON_{GGcGD}(\lambda, \mu, c, O_2)$$

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN *G/G/c*/GD/∞/∞
MODEL ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

Ekspektasi ongkos operasi para pelayan per satuan waktu untuk jumlah pelayan *c*:

$$EOO_{GGcGD}(c, O_1) = \begin{cases} c\ O_1 & \text{if } 0 < \dfrac{\lambda}{\dfrac{c}{pelayan}\ \mu} < 1 \\ \text{"Tidak didefinisikan"} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$EOO_{GGcGD}(c, O_1)$

$c =$		$\frac{Rp}{jam}$
1	*pelayan*	$3 \cdot 10^4$
2		$6 \cdot 10^4$
3		$9 \cdot 10^4$
4		$1.2 \cdot 10^5$
5		$1.5 \cdot 10^5$
6		$1.8 \cdot 10^5$
7		$2.1 \cdot 10^5$

Batas bawah ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem:

$$EN_{GGcGD\_BB}(\lambda, \mu, c) = \begin{cases} c \leftarrow \dfrac{c}{pelayan} \\ \lambda_{eff} \leftarrow \lambda \\ \text{if } \left(0 < \dfrac{\lambda}{c\ \mu} < 1\right) \\ \quad \begin{cases} \text{if } \dfrac{ES^2 - 2\ c\ ET\ ES}{2\ c\ (c\ ET - ES)} - \dfrac{(c-1)\ ES^2}{2\ c\ ES} \geq 0 \\ \quad \begin{cases} h1 \leftarrow \dfrac{ES^2 - 2\ c\ ET\ ES}{2\ c\ (c\ ET - ES)} \\ h2 \leftarrow \dfrac{(c-1)\ ES^2}{2\ c\ ES} \\ \lambda_{eff}\ [(h1 - h2) + ES]\ pelanggan \end{cases} \\ \quad \lambda_{eff}\ (0 + ES)\ pelanggan \quad otherwise \end{cases} \\ \text{"Tidak didefinisikan"} \quad otherwise \end{cases}$$

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN *G/G/c*/GD/∞/∞
MODEL ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

Batas atas ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem:

$$EN_{GGcGD\_BA}(\lambda,\mu,c) = \left|\begin{array}{l} c \leftarrow \dfrac{c}{pelayan} \\ \lambda_{eff} \leftarrow \lambda \\ \text{if } \left(0 < \dfrac{\lambda}{c\ \mu} < 1\right) \\ \quad \left|\begin{array}{l} \text{if } \dfrac{c^2\ VT + VS + (c-1)\ ES^2}{2\ c\ (c\ ET - ES)} \geq 0 \\ \quad \left|\begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{c^2\ VT + VS + (c-1)\ ES^2}{2\ c\ (c\ ET - ES)} \\ \lambda_{eff}\ (h + ES)\ pelanggan \end{array}\right. \\ \lambda_{eff}\left(\infty\ \dfrac{jam}{pelanggan}\right) pelanggan \quad otherwise \end{array}\right. \\ \text{"Tidak didefinisikan"} \quad otherwise \end{array}\right.$$

Median ekspektasi pelanggan sistem yaitu median rata-rata pelanggan dalam sistem besarnya (batas bawahnya + batas atasnya)/2:

$$EN_{GGcGD\_Median}(\lambda,\mu,c) = \frac{EN_{GGcGD\_BB}(\lambda,\mu,c) + EN_{GGcGD\_BA}(\lambda,\mu,c)}{2}$$

Ekspektasi ongkos para pelanggan berada dalam sistem per satuan waktu untuk jumlah pelayan *c*:

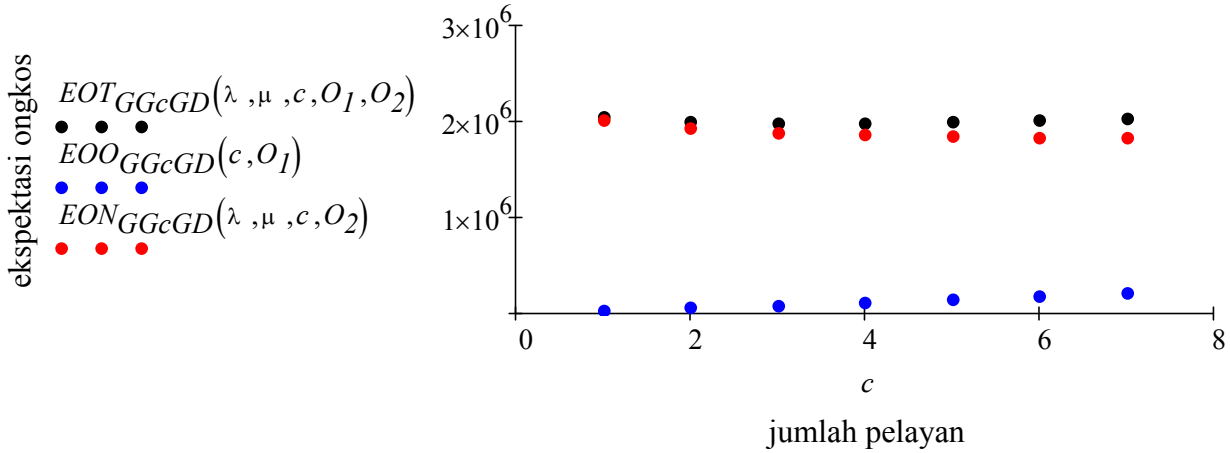
$$EON_{GGcGD}(\lambda,\mu,c,O_2) = O_2\ EN_{GGcGD\_Median}(\lambda,\mu,c)$$

$c =$	$EON_{GGcGD}(\lambda,\mu,c,O_2)$
1 *pelayan*	2.02083·10^6 $\frac{Rp}{jam}$
2	1.93269·10^6
3	1.8851·10^6
4	1.85954·10^6
5	1.84375·10^6
6	1.83305·10^6
7	1.82533·10^6

Ekspektasi ongkos total sistem antrian per satuan waktu untuk jumlah pelayan c:

$$EOT_{GGcGD}(\lambda, \mu, c, O_1, O_2) = EOO_{GGcGD}(c, O_1) + EON_{GGcGD}(\lambda, \mu, c, O_2)$$

$c =$	$EOO_{GGcGD}(c, O_1)$	$EON_{GGcGD}(\lambda, \mu, c, O_2)$	$EOT_{GGcGD}(\lambda, \mu, c, O_1, O_2)$
1 *pelayan*	$3 \cdot 10^4$ $\frac{Rp}{jam}$	$2.02083 \cdot 10^6$ $\frac{Rp}{jam}$	$2.05083 \cdot 10^6$ $\frac{Rp}{jam}$
2	$6 \cdot 10^4$	$1.93269 \cdot 10^6$	$1.99269 \cdot 10^6$
3	$9 \cdot 10^4$	$1.8851 \cdot 10^6$	$1.97510 \cdot 10^6$
4	$1.2 \cdot 10^5$	$1.85954 \cdot 10^6$	$1.97954 \cdot 10^6$
5	$1.5 \cdot 10^5$	$1.84375 \cdot 10^6$	$1.99375 \cdot 10^6$
6	$1.8 \cdot 10^5$	$1.83305 \cdot 10^6$	$2.01305 \cdot 10^6$
7	$2.1 \cdot 10^5$	$1.82533 \cdot 10^6$	$2.03533 \cdot 10^6$



Kurva ekspektasi ongkos vs. jumlah pelayan

MODEL KEPUTUSAN ANTRIAN *G/G/c/GD/∞/∞*
MODEL ONGKOS
JUMLAH PELAYAN OPTIMAL

Jumlah pelayan optimal:

Dalam program ini $c_{atas} \leftarrow konstanta\ c_{min}$.

$konstanta = 7$

$$c_{optGGc}(\lambda, \mu, O_1, O_2) = \left| \begin{array}{l} c_{min} \leftarrow \left| \begin{array}{ll} ceil\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 1 & if\ ceil\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu} \\ ceil\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) & otherwise \end{array} \right. \\ c_{atas} \leftarrow konstanta\ c_{min} \\ for\ \ c \in c_{min} .. c_{atas} \\ \quad v_{EOT_c} \leftarrow \left| \begin{array}{ll} EOT_{GGcGD}(\lambda, \mu, c\ pelayan, O_1, O_2) & if\ 0 < \frac{\lambda}{c\ \mu} < 1 \\ \text{"Tidak didefinisikan"} & otherwise \end{array} \right. \\ \left(match\left(min\left(v_{EOT}\right), v_{EOT}\right) c_{min}\right)\ pelayan \end{array} \right.$$

$$c_{optGGc}(\lambda, \mu, O_1, O_2) = 3\ pelayan$$

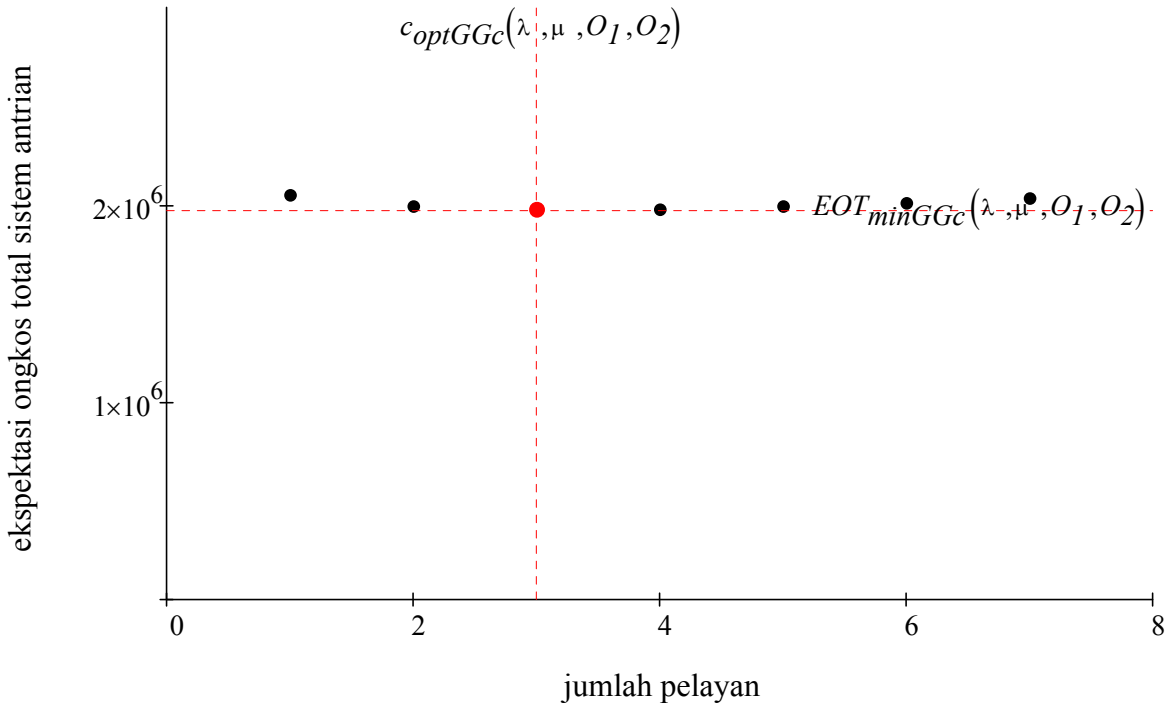
Ekspektasi ongkos total sistem antrian minimum:

Dalam program ini $c_{atas} \leftarrow konstanta\ c_{min}$.

$konstanta = 7$

$$EOT_{minGGc}(\lambda, \mu, O_1, O_2) = \left| \begin{array}{l} c_{min} \leftarrow \left| \begin{array}{ll} ceil\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 1 & if\ ceil\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu} \\ ceil\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) & otherwise \end{array} \right. \\ c_{atas} \leftarrow konstanta\ c_{min} \\ for\ \ c \in c_{min} .. c_{atas} \\ \quad v_{EOT_c} \leftarrow \left| \begin{array}{ll} EOT_{GGcGD}(\lambda, \mu, c\ pelayan, O_1, O_2) & if\ 0 < \frac{\lambda}{c\ \mu} < 1 \\ \text{"Tidak didefinisikan"} & otherwise \end{array} \right. \\ EOT_{min} \leftarrow min\left(v_{EOT}\right) \end{array} \right.$$

$$EOT_{minGGc}(\lambda, \mu, O_1, O_2) = 1.9751 \times 10^6\ \frac{Rp}{jam}$$



Kurva ekspektasi ongkos total sistem antrian vs. jumlah pelayan