

1. PENDAHULUAN TEORI ANTRIAN DAN PENERAPANNYA

Dalam bahasan pokok ini akan dibahas :

- Gambaran umum teori antrian.
- Bidang-bidang penerapan teori antrian.
- Karakteristik sistem antrian.
- Ukuran kinerja sistem antrian.
- Notasi sistem antrian.
- Jenis-jenis sistem antrian.
- Rumus-rumus dasar sistem antrian.

TUJUAN INSTRUKSIONAL UMUM TEORI ANTRIAN

**Hasil-hasil
kemampuan
mahasiswa yang
diharapkan**

1. Mahasiswa mampu mengenali sistem antrian.
2. Mahasiswa mampu memahami persoalan-persoalan sistem antrian.

PETUNJUK CARA MEMPELAJARI MODUL 1

- Untuk memudahkan mempelajari modul 1 ini hendaklah sering mengamati sistem-sistem antrian yang nyata yang terjadi di berbagai bidang-bidang kehidupan.

1.1. GAMBARAN UMUM TEORI ANTRIAN

Teori antrian dipergunakan untuk mengkaji sistem antrian. Teori antrian merupakan model matematikal dari sistem antrian.

Antrian terbentuk karena adanya pelanggan-pelanggan yang memerlukan pelayanan di fasilitas pelayanan. Pelanggan adalah orang dan atau barang yang memerlukan pelayanan. Sedangkan pelayan adalah orang dan atau barang yang memberikan pelayanan. Antrian adalah orang dan atau barang yang sedang menunggu untuk dilayani oleh pelayan.

Istilah-istilah yang penting :

Pelayan adalah orang dan atau barang yang memberikan pelayanan.

Pelanggan adalah orang dan atau barang yang memerlukan pelayanan.

Antrian adalah orang dan atau barang yang sedang menunggu untuk dilayani.

Saat datang adalah saat pelanggan datang memasuki sistem antrian.

Waktu antri adalah selang waktu antara saat datang pelanggan dengan saat mulai mendapatkan pelayanan.

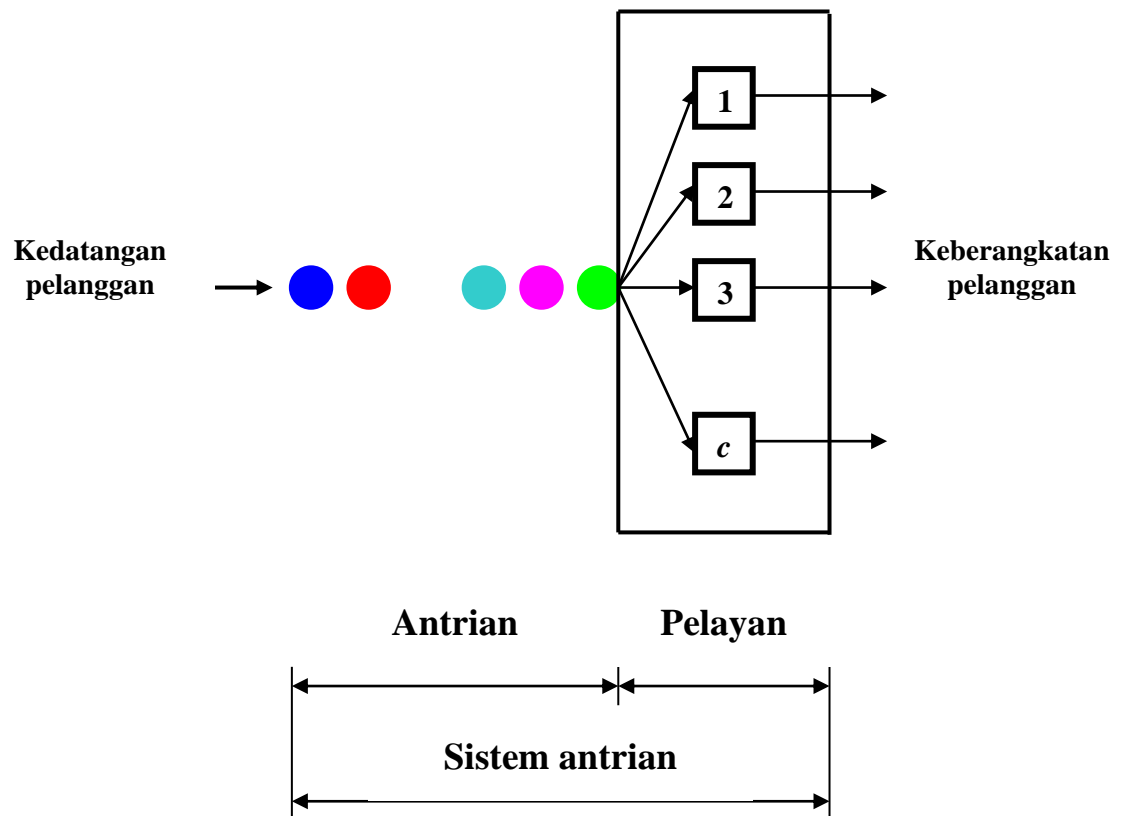
Waktu layan adalah waktu sejak pelanggan mulai dilayani oleh pelayan sampai dengan selesai dilayani.

Waktu sistem adalah jumlah waktu antara waktu antri dan waktu layan.

Jumlah pelanggan antri adalah banyaknya pelanggan yang menunggu sebelum dilayani oleh pelayan.

Jumlah pelanggan sistem adalah banyaknya pelanggan yang berada dalam sistem antrian.

Elemen-elemen dasar sistem antrian dengan pelayan sebanyak c pelayan yang paralel tampak seperti dibawah ini :



Gambar 1.2. Elemen-elemen dasar sistem antrian dengan c pelayan paralel

Persoalan-persoalan dalam sistem antrian

Persoalan-persoalan dalam sistem antrian terbagi dalam :

1. Persoalan-persoalan perilaku.
2. Persoalan-persoalan statistikal.
3. Persoalan-persoalan operasional.

Persoalan-persoalan perilaku sistem antrian

PERSOALAN-PERSOALAN PERILAKU SISTEM ANTRIAN

Persoalan-persoalan perilaku sistem antrian antara lain berkaitan dengan :

- Waktu antri atau waktu tunggu pelanggan dalam antrian.
- Waktu sistem yaitu waktu selama pelanggan dalam sistem antrian.

- Jumlah pelanggan antri yaitu jumlah pelanggan yang berada dalam antrian.
- Jumlah pelanggan sistem yaitu jumlah pelanggan yang berada dalam sistem antrian.

PERSOALAN-PERSOALAN STATISTIKAL SISTEM ANTRIAN

Persoalan-persoalan statistikal sistem antrian antara lain berkaitan dengan :

- Penaksiran parameter sistem antrian dari data yang yang dikumpulkan.
- Pengujian hipotesis yang relevan.

**Persoalan-persoalan
statistikal
sistem antrian**

PERSOALAN-PERSOALAN OPERASIONAL SISTEM ANTRIAN

Persoalan-persoalan operasional sistem antrian antara lain berkaitan dengan :

- Penentuan jumlah pelayan yang optimal dari suatu sistem antrian berdasarkan pertimbangan ongkos-ongkos yang terjadi.
- Penentuan kecepatan pelayanan yang optimal dari suatu sistem antrian.

**Persoalan-persoalan
operasional
sistem antrian**

1.2. BIDANG-BIDANG PENERAPAN TEORI ANTRIAN

Bidang-bidang penerapan teori antrian antara lain :

1. Industri.
2. Bisnis.
3. Transportasi.
4. Telekomunikasi.
5. Kesehatan.
6. Kehidupan sehari-hari lainnya.

**Bidang-bidang
penerapan teori
antrian**

1.3. KARAKTERISTIK SISTEM ANTRIAN

Sistem antrian dapat dicirri dengan :

1. Distribusi kedatangan pelanggan atau distribusi waktu antardatang pelanggan.
2. Distribusi keberangkatan pelanggan atau distribusi waktu layan pelanggan.
3. Jumlah saluran (*channel*) pelayanan.
4. Disiplin antrian.
5. Jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem antrian.
6. Populasi pelanggan.

**Karakteristik
sistem antrian**

1.4. UKURAN KINERJA SISTEM ANTRIAN

Ukuran kinerja sistem antrian bisa :

1. Ekspektasi waktu antri :
Secara umum dapat dikatakan bahwa ekspektasi waktu antri yang lebih kecil lebih baik daripada ekspektasi waktu antri yang lebih besar.
2. Ekspektasi waktu sistem :
Ekspektasi waktu sistem yang lebih kecil lebih baik daripada ekspektasi waktu sistem yang lebih besar.
3. Ekspektasi jumlah pelanggan antri :
Ekspektasi jumlah pelanggan antri yang lebih kecil lebih baik daripada ekspektasi jumlah pelanggan antri yang lebih besar.
4. Ekspektasi jumlah pelanggan sistem :
Ekspektasi jumlah pelanggan sistem yang lebih kecil lebih baik daripada ekspektasi jumlah pelanggan sistem yang lebih besar.

**Ukuran kinerja
sistem antrian**

5. Ekspektasi ongkos total sistem antrian.

Ekspektasi ongkos total sistem antrian yang lebih kecil lebih baik daripada ekspektasi ongkos total sistem antrian yang lebih besar.

1.5. NOTASI SISTEM ANTRIAN

Menotasikan sistem antrian dengan menuliskan :

$$a/b/c/d/e/f$$

di mana

a = distribusi kedatangan pelanggan atau distribusi waktu antardatang pelanggan.

b = distribusi keberangkatan pelanggan atau distribusi waktu layan pelanggan.

c = jumlah saluran pelayanan.

d = disiplin antrian.

e = jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem antrian.

f = populasi pelanggan.

Notasi-notasi yang dipakai untuk menyatakan sistem antrian secara terinci terlihat dalam tabel dibawah ini.

**Notasi sistem
antrian**

Tabel 1.1. Notasi sistem antrian.

	Ciri	Simbol	Keterangan
1.	Distribusi waktu antardatang (<i>a</i>)	<i>M</i> <i>D</i> <i>E_k</i> <i>G</i>	Ekspensial Deterministik Erlang jenis <i>k</i> <i>General</i> (umum)
2.	Distribusi waktu layan (<i>b</i>)	<i>M</i> <i>D</i> <i>E_k</i> <i>G</i>	Ekspensial Deterministik Erlang jenis <i>k</i> <i>General</i> (umum)
3.	Saluran pelayanan (<i>c</i>)	1,2,...,∞	
4.	Disiplin pelayanan (<i>d</i>)	FIFO LIFO SIRO Pri GD	<i>First in first out</i> <i>Last in first out</i> <i>Service in random order</i> <i>Priority</i> <i>General discipline</i>
5.	Jumlah pelanggan maksimum	1,2,...,∞	
6.	Populasi pelanggan	1,2,...,∞	

Contoh menotasikan sistem antrian :

Contoh 1.1

Sistem antrian *M/M/3* menyatakan sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu layannya berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang berangkat berdistribusi Poisson, sedangkan jumlah pelayan paralelnya sebanyak tiga.

Contoh menotasikan sistem antrian

Contoh 1.2

Sistem antrian *M/M/5/FIFO/∞/∞* menyatakan sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu layannya berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang berangkat berdistribusi Poisson, sedangkan jumlah pelayan paralelnya sebanyak lima, jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebanyak takhingga, dan jumlah populasi pelanggan takhingga.

Contoh 1.3

Sistem antrian $M/G/2$ menyatakan sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu layannya berdistribusi umum (*general*), sedangkan jumlah pelayan paralelnya sebanyak dua.

Contoh 1.4

Sistem antrian $G/M/4$ menyatakan sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi umum (*general*), waktu layannya berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang berangkat berdistribusi Poisson, sedangkan jumlah pelayan paralelnya sebanyak empat.

Contoh 1.5

Sistem antrian $G/G/c$ menyatakan sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi umum (*general*), waktu layannya berdistribusi umum (*general*), sedangkan jumlah pelayan paralelnya sebanyak c .

1.6. JENIS-JENIS SISTEM ANTRIAN

Sistem antrian dapat diklasifikasikan berdasarkan distribusi waktu antardatang dan waktu layannya sebagai berikut :

1. Sistem antrian M/M , yaitu sistem antrian yang mempunyai waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson dan waktu layan berdistribusi eksponensial.
2. Sistem antrian M/G , yaitu sistem antrian yang mempunyai waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson dan waktu layan berdistribusi umum.
3. Sistem antrian G/M , yaitu sistem antrian yang mempunyai jumlah waktu antardatang berdistribusi umum dan waktu

**Jenis-jenis
sistem antrian**

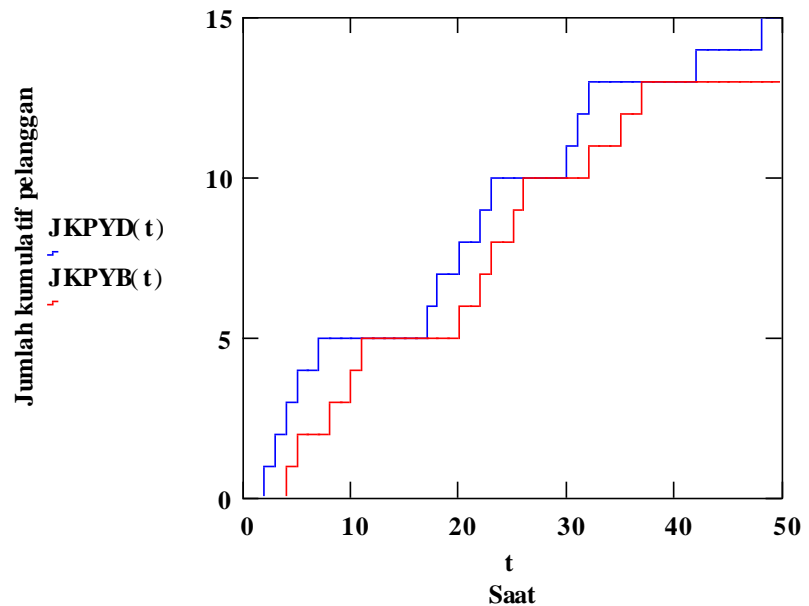
layan berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang berangkat berdistribusi Poisson.

4. Sistem antrian G/G , yaitu sistem antrian yang mempunyai waktu antardatang berdistribusi umum dan waktu layannya juga berdistribusi umum.

1.7. RUMUS-RUMUS DASAR SISTEM ANTRIAN

Perhatikan gambar 1.3 dibawah ini :

Sumbu datar menyatakan sumbu saat/waktu. Sumbu tegak menyatakan jumlah kumulatif pelanggan. Garis yang atas menyatakan jumlah kumulatif pelanggan yang datang sampai saat t yang dinotasikan dengan $JKPYD(t)$. Garis yang dibawahnya $JKPYD(t)$ menyatakan jumlah kumulatif pelanggan yang berangkat sampai saat t yang dinotasikan dengan $JKPYB(t)$. Ingin dicari hubungan antara ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem EN , ekspektasi waktu antardatang pelanggan EI , dan ekspektasi waktu sistem pelanggan EW .



Gambar 1.3. Hubungan jumlah kumulatif pelanggan dengan saat dalam sistem antrian.

$JKPYD(t)$ = Jumlah kumulatif pelanggan yang datang sampai saat t , ditunjukkan dalam gambar pada garis yang atas.

$JKPYB(t)$ = Jumlah kumulatif pelanggan yang berangkat sampai saat t , ditunjukkan dalam gambar pada garis yang bawah.

Jumlah pelanggan dalam sistem sampai saat t tampak sebesar jarak vertikal antara jumlah kumulatif pelanggan yang datang sampai saat t dengan jumlah kumulatif pelanggan yang berangkat sampai saat t .

Waktu sistem pelanggan tampak sebesar jarak horisontal antara garis yang atas dan garis yang bawah.

$WSTP(t)$ = Waktu sistem total dari pelanggan-pelanggan sampai saat t sebesar luas daerah total antara garis jumlah kumulatif pelanggan yang datang sampai saat t

dengan garis jumlah kumulatif pelanggan yang berangkat sampai saat t .

$$\begin{aligned} \text{MLD}(t) &= \text{Mean laju datang sampai saat } t \\ &= \frac{\text{JKPYD}(t)}{t} \end{aligned}$$

atau

$$t = \frac{\text{JKPYD}(t)}{\text{MLD}(t)}$$

$\text{MWS}(t) =$ mean waktu sistem sampai saat $t =$ waktu sistem total dari pelanggan-pelanggan sampai saat t dibagi jumlah kumulatif pelanggan yang datang sampai saat t

$$= \frac{\text{WSTP}(t)}{\text{JKPYD}(t)}$$

atau

$$\text{WSTP}(t) = \text{MWS}(t) \text{JKPYD}(t)$$

$\text{MJPS}(t) =$ Mean jumlah pelanggan sistem sampai saat $t =$ waktu sistem total dari pelanggan-pelanggan sampai saat t dibagi t

$$= \frac{\text{WSTP}(t)}{t}$$

$$= \frac{\text{MWS}(t) \text{JKPYD}(t)}{\frac{\text{JKPYD}(t)}{\text{MLD}(t)}}$$

atau

$$\text{MJPS}(t) = \text{MLD}(t) \text{MWS}(t) .$$

$EI =$ Ekspektasi waktu antardatang pelanggan

$EW =$ Ekspektasi waktu sistem pelanggan

$EN =$ Ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem

Bila limit-limit dibawah ini ada jika t mendekati takhingga,

$$\lambda = \frac{1}{EI} = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{MLD}(t)$$

$$EW = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{MWS}(t)$$

Rumus dasar sistem antrian

$$EN = \lim_{t \rightarrow \infty} MJPS(t)$$

$$\text{maka } EN = \lambda EW = \frac{EW}{EI} \quad (1.1)$$

$$\text{atau } EW = EI EN . \quad (1.2)$$

Rumus (1.1) diatas disebut rumus Little. Rumus sistem antrian diatas tidak bergantung asumsi khusus tentang distribusi kedatangannya, distribusi waktu layannya, jumlah pelayannya, dan disiplin antriannya.

1.8. RANGKUMAN

Rangkuman

- Teori antrian merupakan model matematikal dari sistem antrian.
- Antrian terbentuk karena adanya pelanggan-pelanggan yang memerlukan pelayanan di fasilitas pelayanan.
- Persoalan-persoalan dalam sistem antrian terbagi dalam : persoalan-persoalan perilaku, persoalan-persoalan statistikal, persoalan-persoalan operasional.
- Bidang-bidang penerapan teori antrian antara lain : industri, bisnis, transportasi, telekomunikasi, kesehatan, dan kehidupan sehari-hari lainnya.
- Sistem antrian dapat dicirri dengan : distribusi waktu antardatang pelanggan, distribusi waktu layan pelanggan, jumlah saluran (*channel*) pelayanan, disiplin antrian, jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem antrian, dan populasi pelanggan.
- Ukuran kinerja sistem antrian bisa : ekspektasi waktu antri, ekspektasi waktu sistem, ekspektasi jumlah pelanggan antri, ekspektasi jumlah pelanggan sistem, ekspektasi ongkos total sistem antrian.

- Menotasikan sistem antrian dengan menuliskan : $a/b/c/d/e/f$.
- Sistem antrian dapat diklasifikasikan berdasarkan distribusi waktu antardatang dan waktu layannya sebagai berikut : sistem antrian M/M , sistem antrian M/G , sistem antrian G/M , sistem antrian G/G .
- Rumus dasar sistem antrian

$$EN = \lambda EW = \frac{EW}{EI} \text{ atau } EW = EI EN ,$$

tidak bergantung asumsi khusus tentang distribusi kedatangannya, distribusi waktu layannya, jumlah pelayannya, dan disiplin antriannya.

1.9. LATIHAN

Latihan 1.1

Apa artinya sistem antrian $M/M/7/FIFO/\infty/\infty$?

Latihan 1.2

Apa artinya sistem antrian $M/G/9/LIFO/23/\infty$?

Latihan 1.3

Apa artinya sistem antrian $G/G/5/FIFO/17/\infty$?

Latihan 1.4

Suatu sistem antrian mempunyai $EI = 0,25$ jam per pelanggan dan $EW = 0,5$ jam. Berapa besarnya EN ? [2 pelanggan]

Latihan 1.5

Suatu sistem antrian mempunyai ekspektasi waktu antardatang pelanggan $EI = 0,5$ jam per pelanggan dan ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem $EN = 6$ pelanggan. Berapa besarnya ekspektasi waktu sistem pelanggan EW ? [3 jam]

Latihan

1.10. UMPAN BALIK

Umpan balik

- Hitung tingkat penguasaan Anda dengan rumus

Tingkat penguasaan =

$$\frac{\text{Jumlah jawaban latihan yang benar}}{\text{Jumlah latihan}} \times 100\%$$

- Arti besarnya tingkat penguasaan :

$90\% \leq \text{Tingkat penguasaan} \leq 100\%$ = Baik sekali

$80\% \leq \text{Tingkat penguasaan} < 90\%$ = Baik

$70\% \leq \text{Tingkat penguasaan} < 80\%$ = Cukup

$0\% \leq \text{Tingkat penguasaan} < 70\%$ = Kurang

- Jika skor yang Anda peroleh sebesar 80% atau lebih maka Anda dapat meneruskan ke modul berikutnya. Apabila skor yang Anda peroleh kurang dari 80% maka bacalah kembali materi modul ini, terutama hal-hal yang belum Anda kuasai!

1.11. DAFTAR PUSTAKA

Daftar pustaka

1. Gross, D., Carl M. Harris (1974). *Fundamentals of Queueing Theory*. New York : John Wiley & Sons, Inc.
2. Hall, Randolph W. (1991). *Queueing Methods : For Services and Manufacturing*. Englewood Cliffs : Prentice Hall, Inc.