3. SISTEM ANTRIAN *M/M/c*

Dalam bahasan pokok ini akan dibahas :

- **Sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/∞/∞ : yaitu sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu layannya berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang berangkat berdistribusi Poisson, sedangkan jumlah pelayan paralelnya sebanyak *c*, disiplin pelayanannya umum, jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebanyak takhingga, dan jumlah populasi pelanggan takhingga.**
- **Sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/*K*/∞ : yaitu sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu layannya berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang berangkat berdistribusi Poisson, sedangkan jumlah pelayan paralelnya sebanyak *c*, disiplin pelayanannya umum, jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebanyak *K*, dan jumlah populasi pelanggan takhingga.**

Sistem antrian $M/M/c/GD/\infty/\infty$

3.1. SISTEM ANTRIAN $M/M/c/GD/\infty/\infty$

NOTASI-NOTASI YANG PENTING :

Notasi-notasi yang penting

λ **menyatakan laju datang (*arrival rate*) yaitu jumlah pelanggan yang datang rata-rata per satuan waktu**

μ **menyatakan laju layan yaitu jumlah pelanggan yang telah dilayani rata-rata per satuan waktu**

λ_n **menyatakan laju datang dari keadaan (*state*) jumlah pelanggan sebanyak n**

μ_n **menyatakan laju layan dari keadaan jumlah pelanggan sebanyak n**

ρ **menyatakan faktor utilisasi =** $\dfrac{\lambda}{c\mu}$

p_n **menyatakan probabilitas ada n pelanggan dalam sistem antrian yang keadaannya mapan (*steady state*), p_n menyatakan juga ekspektasi proporsi waktu bahwa sistem berada dengan jumlah pelanggan sebanyak n.**

Keadaan mapan (*steady state*) berarti distribusi probabilitas jumlah pelanggan dalam antrian dan distribusi probabilitas jumlah pelanggan dalam sistem tidak bergantung waktu.

λ_{eff} **= laju datang rata-rata effektif =** $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n$

EN **ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem**

EN_q **ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian**

EW **ekspektasi waktu sistem yaitu waktu rata-rata pelanggan berada dalam sistem**

ED **ekspektasi waktu antri yaitu waktu rata-rata pelanggan berada dalam antrian**

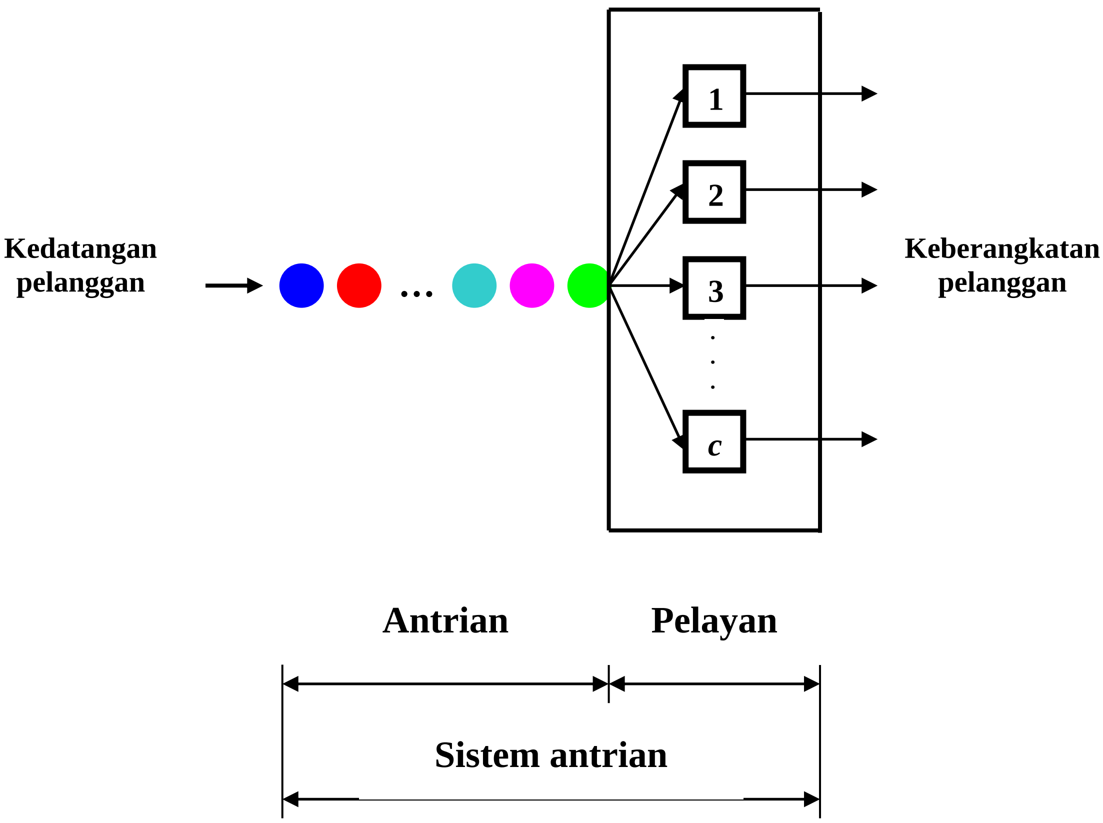
ET ekspektasi waktu antardatang pelanggan, yaitu besarnya sama dengan $\dfrac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n} = \dfrac{1}{\lambda}$

ES ekspektasi waktu layan pelanggan, yaitu besarnya sama dengan $\dfrac{1}{\mu}$

Laju datang $\lambda_n = \lambda$ konstan untuk $n \geq 0$, dan laju layan per pelayan juga konstan sebesar μ, dan

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu\ , & n \leq c \\ c\mu\ , & n \geq c \end{cases}$$

Faktor utilisasi $\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu} < 1$



$$
\begin{aligned}
\lambda_{eff} &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda p_n \\
&= \lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_n \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

Untuk $n \le c$ maka besarnya

$$
\begin{aligned}
p_n &= \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1} p_0 \\
&= \frac{\lambda\lambda\cdots\lambda}{(n\mu)\{(n-1)\mu\}\cdots\mu} p_0 \\
&= \frac{\lambda^n}{\{n(n-1)\cdots 1\}(\mu\mu\cdots\mu)} p_0 \\
&= \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} p_0 .
\end{aligned}
$$

Untuk $n \ge c$ maka besarnya

$$
\begin{aligned}
p_n &= \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1} p_0 \\
&= \frac{\lambda\lambda\cdots\lambda}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_{c+1}\mu_c\mu_{c-1}\cdots\mu_2\mu_1} p_0 \\
&= \frac{\lambda^n}{(c\mu)(c\mu)\cdots(c\mu)(c\mu)\{(c-1)\mu\}\cdots 2\mu(\mu)} p_0 \\
&= \frac{\lambda^n}{\{(c)(c)\cdots(c)\}\{(c)(c-1)\cdots(2)(1)\}\mu^n} p_0 \\
&= \frac{\lambda^n}{\{(c)(c-1)\cdots(2)(1)\}\{(c)(c)\cdots(c)\}\mu^n} p_0 \\
&= \frac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n} p_0
\end{aligned}
$$

Jadi probabilitas ada *n* pelanggan dalam sistem p_n

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n}\, p_0, & n \le c \\ \dfrac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n}\, p_0, & n \ge c \end{cases} \tag{3.1}$$

Probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem p_0 didapat dari

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0 + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} p_0 = 1$$

$$p_0\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n}\right) = 1$$

$$p_0\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \sum_{n-c=c-c}^{\infty-c} \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n}\right) = 1$$

bila n - c = m sehingga n = m + c maka

$$p_0\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \sum_{n-c=c-c}^{\infty-c} \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n}\right) = 1$$

$$p_0\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+c}}{c!c^m\mu^{m+c}}\right) = 1$$

$$p_0\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m\lambda^c}{c!c^m\mu^m\mu^c}\right) = 1$$

$$p_0\left\{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{c^m\mu^m}\right\} = 1$$

$$p_0\left\{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left(\frac{1}{1-\dfrac{\lambda}{c\mu}}\right)\right\} = 1, \quad \text{untuk } \frac{\lambda}{c\mu} < 1$$

sehingga

Probabilitas nol dari *M/M/c/GD/∞/∞*

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right)} \tag{3.2}$$

Dari p_0 diatas didapat probabilitas ada *n* pelanggan dalam sistem p_n secara terinci yaitu

Probabilitas *n* dari *M/M/c/GD/∞/∞*

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n}\dfrac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right)}, & n \le c \\ \dfrac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n}\dfrac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right)}, & n \ge c \end{cases} \tag{3.3}$$

Dari hasil diatas maka ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian EN_q

$$\begin{aligned} EN_q &= \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)p_n \\ &= \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)\frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n}p_0 \\ &= \sum_{n-c=c-c}^{\infty-c}(n-c)\frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n}p_0 \end{aligned}$$

bila *n - c = m* maka

$$\begin{aligned} EN_q &= \sum_{m=0}^{\infty} m\frac{\lambda^{m+c}}{c!c^m\mu^{m+c}}p_0 \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} m\frac{\lambda^m\lambda^c}{c!c^m\mu^m\mu^c}p_0 \\ &= \frac{\lambda^c}{c!\mu^c}p_0\sum_{m=0}^{\infty} m\frac{\lambda^m}{c^m\mu^m} \\ &= \frac{\lambda^c}{c!\mu^c}p_0\sum_{m=0}^{\infty} m\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^m \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda^c}{c!\mu^c} p_0 \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda}{c\mu}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{m-1}$$

$$= \frac{\lambda^c}{c!\mu^c} p_0 \frac{\lambda}{c\mu} \sum_{m=0}^{\infty} m\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{m-1}$$

$$= \frac{\lambda^c}{c!\mu^c} p_0 \frac{\lambda}{c\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d}{d\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)}\left\{\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{m}\right\}$$

$$= \frac{\lambda^c}{c!\mu^c} p_0 \frac{\lambda}{c\mu} \frac{d}{d\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)} \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{m}$$

$$= \frac{\lambda^c}{c!\mu^c} p_0 \frac{\lambda}{c\mu} \frac{d}{d\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right) \qquad \text{untuk } \frac{\lambda}{c\mu} < 1$$

$$= \frac{\lambda^c}{c!\mu^c} p_0 \frac{\lambda}{c\mu} \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2} \tag{3.4}$$

Karena

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right)}$$

maka maka ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian

ENq dari M/M/c/GD/∞/∞

$$EN_q = \frac{\lambda^c}{c!\mu^c} \frac{\lambda}{c\mu} \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2} \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right)} \tag{3.5}$$

Besarnya ekspektasi waktu antri *ED*

$$ED = \frac{EN_q}{\lambda_{eff}}$$

$$= \frac{EN_q}{\lambda}$$

jadi

ED dari M/M/c/GD/∞/∞

$$ED = \frac{\lambda^c}{c!\,\mu^c}\,\frac{1}{c\mu}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2}\,\frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right)}. \qquad (3.6)$$

Besarnya ekspektasi waktu sistem EW

$$EW = ED + \frac{1}{\mu}$$

EW dari M/M/c/GD/∞/∞

$$EW = \frac{\lambda^c}{c!\,\mu^c}\,\frac{1}{c\mu}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2}\,\frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right)}+\frac{1}{\mu} \qquad (3.7)$$

EN dari M/M/c/GD/∞/∞

Ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem $EN = \lambda_{eff}\,EW = \lambda EW$.

Contoh 3.1

Suatu sistem antrian $M/M/c$/GD/∞/∞ laju datang λ sebesar lima belas pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar tiga pelanggan per jam, dan jumlah pelayan c sebesar enam.

a. Berapa probabilitasnya tidak ada pelanggan dalam sistem?
b. Berapa probabilitasnya ada tiga pelanggan dalam sistem?
c. Berapa probabilitasnya ada tujuh pelanggan dalam sistem?
d. Berapa ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian?
e. Berapa ekspektasi waktu antri?
f. Berapa ekspektasi waktu sistem?
g. Berapa ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem?

Jawab :

a. Probabilitasnya tidak ada pelanggan dalam sistem

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right)} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right)}$$

$= 0,00451$

di mana λ = **15 pelanggan per jam**

μ = **3 pelanggan per jam**

c = **6 pelayan.**

b.

Dengan λ = **15 pelanggan per jam**

μ = **3 pelanggan per jam**

c = **6 pelayan**

$n = 3$ **lebih kecil dari** $c = 6$.

Probabilitasnya ada tiga pelanggan dalam sistem p_3

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n}p_0 = \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n}\dfrac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right)}, & n \le c \\ \dfrac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n}p_0 = \dfrac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n}\dfrac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right)}, & n \ge c \end{cases}$$

$p_3 = 0,09400$

c.

Dengan λ = **15 pelanggan per jam**

μ = **3 pelanggan per jam**

c = **6 pelayan**

$n = 7$ **lebih besar dari** $c = 6$.

Probabilitasnya ada tujuh pelanggan dalam sistem p_7

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0 = \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \dfrac{1}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^c \left(\dfrac{c\mu}{c\mu - \lambda}\right)}, & n \le c \\ \dfrac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} p_0 = \dfrac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \dfrac{1}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^c \left(\dfrac{c\mu}{c\mu - \lambda}\right)}, & n \ge c \end{cases}$$

p_7 = 0,08160

d. Dengan λ = 15 pelanggan per jam

μ = 3 pelanggan per jam

c = 6 pelayan

maka ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian

$$EN_q = \frac{\lambda^c}{c!\mu^c} p_0 \frac{\lambda}{c\mu} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^2} \text{ atau}$$

$$= \frac{\lambda^c}{c!\mu^c} \frac{\lambda}{c\mu} \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^2} \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \dfrac{1}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^c \left(\dfrac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{c\mu}}\right)}$$

= 2,93758 pelanggan.

e. Dengan λ = 15 pelanggan per jam

μ = 3 pelanggan per jam

c = 6 pelayan

$\lambda_{eff} = \lambda$ = 15 pelanggan per jam

maka ekspektasi waktu antri

$ED = \dfrac{EN_q}{\lambda_{eff}}$ dari = 0,19584 jam atau bisa dihitung dari

$$ED = \frac{\lambda^c}{c!\mu^c}\frac{1}{c\mu}\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2}\frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right)} = 0{,}19584$$

jam

f. Dengan $ED = \frac{EN_q}{\lambda_{eff}}$ **= 0,19584 jam**

$\frac{1}{\mu}$ **= 0,33333 jam**

maka ekspektasi waktu sistem

$EW = ED + \frac{1}{\mu}$

= 0,52917 jam.

g. Dengan $\lambda_{eff} = \lambda$ **= 15 pelanggan per jam**

EW **= 0,52917 jam**

maka ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem

$EN = \lambda_{eff}\, EW = \lambda EW$ **= 7,93758 pelanggan.**

Contoh 3.2

Suatu sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/∞/∞ laju datang λ sebesar lima belas pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar tiga pelanggan per jam. Pengaruh jumlah pelayan *c* terhadap ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian, ekspektasi waktu antri, ekspektasi waktu sistem, dan ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem tampak di bawah ini.

Dengan λ **= 15 pelanggan per jam**

μ **= 3 pelanggan per jam**

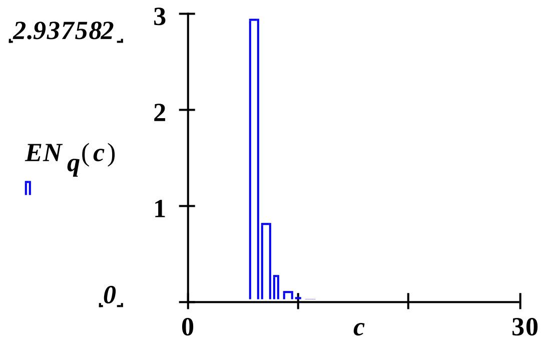
maka ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian sebagai fungsi dari jumlah pelayan *c* adalah

$$EN_q(c) = \frac{\lambda^c}{c!\,\mu^c}\, p_0 \,\frac{\lambda}{c\mu}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2} \quad \text{atau}$$

$$= \frac{\lambda^c}{c!\,\mu^c}\,\frac{\lambda}{c\mu}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2}\,\frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right)}$$

Tabel 3.1. Hubungan jumlah pelayan *c* dengan ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian EN_q untuk sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/∞/∞, laju datang λ sebesar lima belas pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar tiga pelanggan per jam.

c	*ENq*
6	2,93758
7	0,81037
8	0,27878
9	0,10064
10	0,03611
11	0,01257
12	0,00420
13	0,00134
14	0,00041
15	0,00012
16	0,00003
17	0,00001
18	0,00000
19	0,00000
20	0,00000
21	0,00000
22	0,00000
23	0,00000
24	0,00000



Gambar 3.1. Hubungan jumlah pelayan *c* dengan ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian EN_q untuk sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/∞/∞, laju datang λ sebesar lima belas pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar tiga pelanggan per jam.

Contoh 3.3

Suatu sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/∞/∞ laju datang λ sebesar lima belas pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar tiga pelanggan per jam. Pengaruh jumlah pelayan *c* terhadap ekspektasi waktu antri *ED* tampak di bawah ini.

Dengan λ = 15 pelanggan per jam

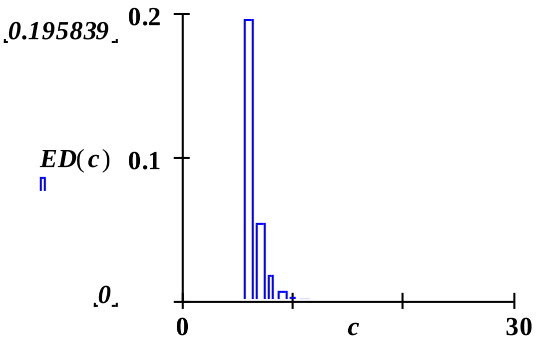
μ = 3 pelanggan per jam

maka ekspektasi waktu antri sebagai fungsi dari jumlah pelayan *c* adalah

$$ED(c) = \frac{EN_q(c)}{\lambda_{eff}}$$

Tabel 3.2. Hubungan jumlah pelayan *c* dengan ekspektasi waktu antri *ED* untuk sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/∞/∞, laju datang λ sebesar lima belas pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar tiga pelanggan per jam.

c	*ED*
6	0,19584
7	0,05402
8	0,01859
9	0,00671
10	0,00241
11	0,00084
12	0,00028
13	0,00009
14	0,00003
15	0,00001
16	0,00000
17	0,00000
18	0,00000
19	0,00000
20	0,00000
21	0,00000
22	0,00000
23	0,00000
24	0,00000
25	0,00000



Gambar 3.2. Hubungan jumlah pelayan *c* dengan ekspektasi waktu antri *ED* untuk sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/∞/∞, laju datang λ sebesar lima belas pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar tiga pelanggan per jam.

Contoh 3.4

Suatu sistem antrian $M/M/c$/GD/∞/∞ laju datang λ sebesar lima belas pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar tiga pelanggan per jam. Pengaruh jumlah pelayan c terhadap ekspektasi waktu sistem tampak di bawah ini.

Dengan λ = **15 pelanggan per jam**

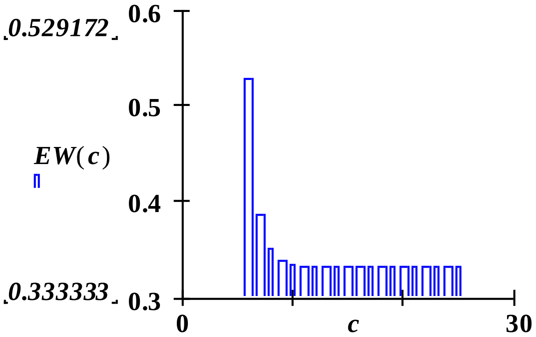
μ = **3 pelanggan per jam**

maka ekspektasi waktu sistem sebagai fungsi dari jumlah pelayan c adalah

$$EW(c) = ED(c) + \frac{1}{\mu}$$

Tabel 3.3. Hubungan jumlah pelayan c dengan ekspektasi waktu sistem EW untuk sistem antrian $M/M/c$/GD/∞/∞, laju datang λ sebesar lima belas pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar tiga pelanggan per jam.

c	EW
6	0,52917
7	0,38736
8	0,35192
9	0,34004
10	0,33574
11	0,33417
12	0,33361
13	0,33342
14	0,33336
15	0,33334
16	0,33334
17	0,33333
18	0,33333
19	0,33333
20	0,33333
21	0,33333
22	0,33333
23	0,33333
24	0,33333



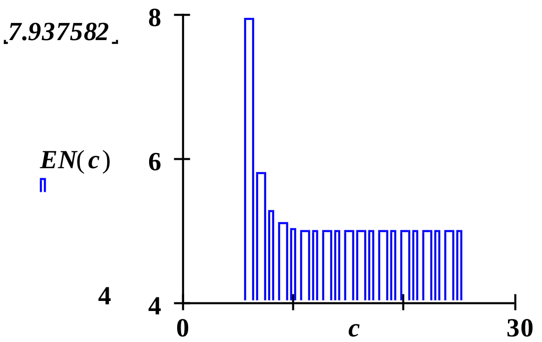
Gambar 3.3. Hubungan jumlah pelayan *c* dengan ekspektasi waktu sistem *EW* untuk sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/∞/∞, laju datang λ sebesar lima belas pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar tiga pelanggan per jam.

Contoh 3.5

Suatu sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/∞/∞ laju datang λ sebesar lima belas pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar tiga pelanggan per jam. Pengaruh jumlah pelayan *c* terhadap ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem tampak di bawah ini.

Tabel 3.4. Hubungan jumlah pelayan *c* dengan ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem EN untuk sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/∞/∞, laju datang λ sebesar lima belas pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar tiga pelanggan per jam.

c	*EN*
6	7,93758
7	5,81037
8	5,27878
9	5,10064
10	5,03611
11	5,01257
12	5,00420
13	5,00134
14	5,00041
15	5,00012
16	5,00003
17	5,00001
18	5,00000
19	5,00000
20	5,00000
21	5,00000
22	5,00000
23	5,00000
24	5,00000



Gambar 3.4. Hubungan jumlah pelayan *c* dengan ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem *EN* untuk sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/∞/∞, laju datang λ sebesar lima belas pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar tiga pelanggan per jam.

Sistem antrian $M/M/c/GD/K/\infty$

3.2. SISTEM ANTRIAN $M/M/c/GD/K/\infty$

NOTASI-NOTASI YANG PENTING :

Notasi-notasi yang penting

λ menyatakan laju datang (*arrival rate*) yaitu jumlah pelanggan yang datang rata-rata per satuan waktu

μ menyatakan laju layan yaitu jumlah pelanggan yang telah dilayani rata-rata per satuan waktu

λ_n menyatakan laju datang dari keadaan (*state*) jumlah pelanggan sebanyak n

μ_n menyatakan laju layan dari keadaan jumlah pelanggan sebanyak n

ρ menyatakan faktor utilisasi = $\dfrac{\lambda}{c\mu}$

p_n menyatakan probabilitas ada n pelanggan dalam sistem antrian yang keadaannya mapan (*steady state*), p_n menyatakan juga ekspektasi proporsi waktu bahwa sitem berada dengan jumlah pelanggan sebanyak n.
Keadaan mapan (*steady state*) berarti distribusi probabilitas jumlah pelanggan dalam antrian dan distribusi probabilitas jumlah pelanggan dalam sistem tidak bergantung waktu.

λ_{eff} = laju datang rata-rata effektif = $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n$

K menyatakan jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem antrian, di mana $K \geq c$.

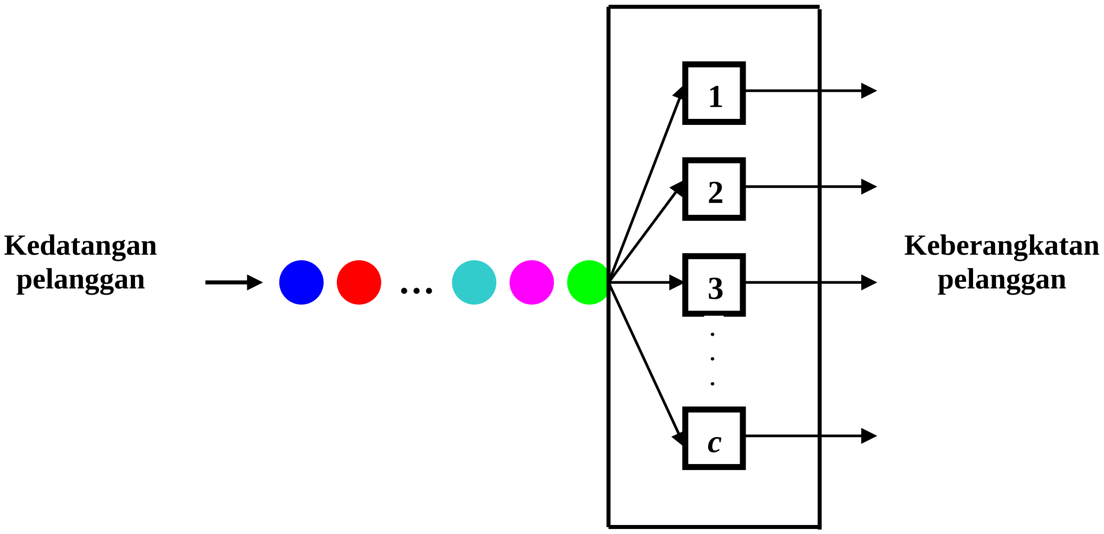
EN ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem

EN_q ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian

EW ekspektasi waktu sistem yaitu waktu rata-rata pelanggan berada dalam sistem

ED ekspektasi waktu antri yaitu waktu rata-rata pelanggan berada dalam antrian

❐ Sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/*K*/∞ : yaitu sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu layannya berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang berangkat berdistribusi Poisson, sedangkan jumlah pelayan paralelnya sebanyak *c*, disiplin pelayanannya umum, jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebanyak *K*, dan jumlah populasi pelanggan takhingga.



Jumlah pelanggan antri maksimum sebesar *K*-*c*

Jumlah pelanggan dalam sistem maksimum sebesar *K*

Sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/*K*/∞ ini mempunyai

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & 0 \le n < K \\ 0, & n \ge K \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \le n < c \\ c\mu, & c \le n \le K \\ 0, & n > K \end{cases}$$

Dalam kondisi $0 \le n < c$

$$
\begin{aligned}
p_n &= \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}\,p_0 \\
&= \frac{\lambda\lambda\cdots\lambda}{(n\mu)\{(n-1)\mu\}\cdots\mu}\,p_0 \\
&= \frac{\lambda^n}{\{n(n-1)\cdots 1\}(\mu\mu\cdots\mu)}\,p_0 \\
&= \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\,p_0, \qquad 0 \le n < c
\end{aligned}
$$

Dalam kondisi $c \le n \le K$

$$
\begin{aligned}
p_n &= \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}\,p_0 \\
&= \frac{\lambda\lambda\cdots\lambda}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_{c+1}\mu_c\mu_{c-1}\cdots\mu_2\mu_1}\,p_0 \\
&= \frac{\lambda^n}{(c\mu)(c\mu)\cdots(c\mu)(c\mu)\{(c-1)\mu\}\cdots 2\mu(\mu)}\,p_0 \\
&= \frac{\lambda^n}{\{(c)(c)\cdots(c)\}\{(c)(c-1)\cdots(2)(1)\}\mu^n}\,p_0 \\
&= \frac{\lambda^n}{\{(c)(c-1)\cdots(2)(1)\}\{(c)(c)\cdots(c)\}\mu^n}\,p_0 \\
&= \frac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n}\,p_0, \qquad c \le n \le K
\end{aligned}
$$

Jadi

$$
p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\,p_0, & 0 \le n < c \\[2ex] \dfrac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n}\,p_0, & c \le n \le K \\[2ex] 0, & n > K \end{cases} \tag{3.8}
$$

Probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem p_0 **didapat dari**

$$
\sum_{n=0}^{K} p_n = 1
$$

$$\sum_{n=0}^{c-1} p_n + \sum_{n=c}^{K} p_n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} p_0 + \sum_{n=c}^{K} \frac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n} p_0 = 1$$

$$p_0\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \sum_{n=c}^{K} \frac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n}\right) = 1$$

$$p_0\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \sum_{n-c=c-c}^{K-c} \frac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n}\right) = 1$$

bila *n* - *c* = *m* sehingga *n* = *m* + *c* maka

$$p_0\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \sum_{n-c=c-c}^{K-c} \frac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n}\right) = 1$$

$$p_0\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \sum_{m=0}^{K-c} \frac{\lambda^{m+c}}{c!\,c^m \mu^{m+c}}\right) = 1$$

$$p_0\left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \sum_{m=0}^{K-c} \frac{\lambda^m \lambda^c}{c!\,c^m \mu^m \mu^c}\right) = 1$$

$$p_0\left\{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \sum_{m=0}^{K-c} \frac{\lambda^m}{c^m \mu^m}\right\} = 1$$

$$p_0\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left\{\frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right\}\right] = 1, \quad \text{untuk } \frac{\lambda}{c\mu} \neq 1$$

sehingga

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left\{\frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right\}}, \quad \text{untuk } \frac{\lambda}{c\mu} \neq 1 \qquad (3.9)$$

Untuk $\frac{\lambda}{c\mu} = 1$

$$p_0\left\{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\sum_{m=0}^{K-c}\frac{\lambda^m}{c^m\mu^m}\right\}=1$$

$$p_0\left\{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\{1+(K-c)(1)\}\right\}=1$$

$$p_0\left\{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c(1+K-c)\right\}=1$$

sehingga

$$p_0=\frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c(1+K-c)},\quad \text{untuk } \frac{\lambda}{c\mu}=1 \qquad (3.10)$$

Jadi besarnya p_0 adalah

Probabilitas nol dari *M*/*M*/*c*/GD/*K*/∞

$$p_0=\begin{cases}\dfrac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left\{\dfrac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right\}}, & \text{untuk } \dfrac{\lambda}{c\mu}\neq 1\\[2ex] \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c(1+K-c)}, & \text{untuk } \dfrac{\lambda}{c\mu}=1\end{cases} \qquad (3.11)$$

Dari p_0 diatas didapat probabilitas ada *n* pelanggan dalam sistem p_n secara terinci yaitu

Probabilitas *n* dari *M/M/c/GD/K/∞*

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left\{\frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right\}}, & 0\le n<c, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu}\ne 1 \\ \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c(1+K-c)}, & 0\le n<c, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu}=1 \\ \dfrac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n}\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left\{\frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right\}}, & c\le n\le K, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu}\ne 1 \\ \dfrac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n}\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c(1+K-c)}, & c\le n\le K, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu}=1 \\ 0, & n>K \end{cases}$$

(3.12)

Dari hasil diatas maka ekspektasi jumlah pelanggan antri EN_q

$$EN_q = \sum_{n=c}^{K}(n-c)p_n$$

$$= (c-c)p_c + \sum_{n=c+1}^{K}(n-c)p_n$$

$$= 0 + \sum_{n=c+1}^{K}(n-c)p_n$$

$$= \sum_{n=c+1}^{K}(n-c)\frac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n}\,p_0$$

$$= \sum_{n-c=c+1-c}^{K-c}(n-c)\frac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n}\,p_0$$

bila *n* - *c* = *j* sehingga *n* = *j* + *c* maka

$$EN_q = \sum_{j=1}^{K-c} j \frac{\lambda^{j+c}}{c!c^j \mu^{j+c}} p_0$$

$$= \sum_{j=1}^{K-c} j \frac{\lambda^{j+c}}{c!c^j \mu^{j+c}} p_0$$

$$= p_0 \frac{1}{c!} \frac{\lambda^c}{\mu^c} \sum_{j=1}^{K-c} j \frac{\lambda^j}{c^j \mu^j}$$

$$= p_0 \frac{1}{c!} \frac{\lambda^c}{\mu^c} \sum_{j=1}^{K-c} j \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^j$$

Untuk $\frac{\lambda}{c\mu} = 1$ **didapat**

$$EN_q = p_0 \frac{1}{c!} \frac{\lambda^c}{\mu^c} \sum_{j=1}^{K-c} j \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^j$$

$$= p_0 \frac{1}{c!} \frac{\lambda^c}{\mu^c} \sum_{j=1}^{K-c} j$$

$$EN_q = p_0 \frac{1}{c!} \frac{\lambda^c}{\mu^c} \left\{ \frac{K-c}{2} (1 + K - c) \right\}, \quad \text{untuk } \frac{\lambda}{c\mu} = 1 \qquad (3.13)$$

dan untuk $\frac{\lambda}{c\mu} \neq 1$ **didapat**

$$EN_q = p_0 \frac{1}{c!} \frac{\lambda^c}{\mu^c} \sum_{j=1}^{K-c} j \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^j$$

$$= p_0 \frac{1}{c!} \frac{\lambda^c}{\mu^c} \sum_{j=1}^{K-c} j \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{j-1} \frac{\lambda}{c\mu}$$

$$= p_0 \frac{1}{c!} \frac{\lambda^c}{\mu^c} \frac{\lambda}{c\mu} \sum_{j=1}^{K-c} j \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{j-1}$$

$$= p_0 \frac{1}{c!} \frac{\lambda^c}{\mu^c} \frac{\lambda}{c\mu} \sum_{j=1}^{K-c} \frac{d}{d\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)} \left\{ \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^j \right\}$$

$$= p_0 \frac{1}{c!} \frac{\lambda^c}{\mu^c} \frac{\lambda}{c\mu} \frac{d}{d\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)} \sum_{j=1}^{K-c} \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^j$$

$$= p_0 \frac{1}{c!}\frac{\lambda^c}{\mu^c}\frac{\lambda}{c\mu}\frac{d}{d\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)}\left\{\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^1+\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^3+\ldots+\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c}\right\}$$

$$= \quad p_0 \frac{1}{c!}\frac{\lambda^c}{\mu^c}\frac{\lambda}{c\mu}\frac{d}{d\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)}\left\{\frac{\frac{\lambda}{c\mu}-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right\}$$

$$EN_q = \quad p_0 \frac{1}{c!}\frac{\lambda^c}{\mu^c}\frac{\lambda}{c\mu}\left\{\frac{1-(K-c+1)\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c}+(K-c)\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2}\right\}$$

untuk $\frac{\lambda}{c\mu} \neq 1$ (3.14)

Jadi ekspektasi jumlah pelanggan antri EN_q

Probabilitas EN_q dari $M/M/c/GD/K/\infty$

$$EN_q = \begin{cases} p_0 \frac{1}{c!}\frac{\lambda^c}{\mu^c}\frac{\lambda}{c\mu}\left\{\frac{1-(K-c+1)\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c}+(K-c)\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2}\right\}, & \frac{\lambda}{c\mu} \neq 1 \\ p_0 \frac{1}{c!}\frac{\lambda^c}{\mu^c}\left\{\frac{K-c}{2}(1+K-c)\right\}, & \frac{\lambda}{c\mu} = 1 \end{cases}$$

(3.15)

Ekspektasi waktu antri ED

$$ED \quad = \quad \frac{EN_q}{\lambda_{eff}}$$

di mana $\lambda_{eff} \quad = \quad \sum_{n=0}^{K} \lambda_n p_n$

$$= \quad \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \ldots + \lambda_{K-1} p_{K-1} + \lambda_K p_K$$

$$= \quad \lambda p_0 + \lambda p_1 + \ldots + \lambda p_{K-1} + 0 \cdot p_K$$

$$= \lambda p_0 + \lambda p_1 + \ldots + \lambda p_{K-1}$$

$$= \lambda\left(p_0 + p_1 + \ldots + p_{K-1}\right)$$

karena $\sum_{n=0}^{K} p_n = 1$ atau $\sum_{n=0}^{K-1} p_n = 1 - p_K$ maka

$$\lambda_{eff} = \lambda\left(1 - p_K\right)$$

$$\lambda_{eff} = \lambda\left(1 - \frac{\lambda^K}{c!c^{K-c}\mu^K} p_0\right) \tag{3.16}$$

sehingga ekspektasi waktu antri ED

$$ED = \frac{EN_q}{\lambda_{eff}}$$

Probabilitas *ED* dari *M*/*M*/*c*/GD/*K*/∞

$$ED = \frac{EN_q}{\lambda\left(1 - \frac{\lambda^K}{c!c^{K-c}\mu^K} p_0\right)}. \tag{3.17}$$

Ekspektasi waktu antri EW

$$EW = ED + \frac{1}{\mu}$$

Probabilitas *EW* dari *M*/*M*/*c*/GD/*K*/∞

$$EW = \frac{EN_q}{\lambda\left(1 - \frac{\lambda^K}{c!c^{K-c}\mu^K} p_0\right)} + \frac{1}{\mu}. \tag{3.18}$$

Ekspektasi jumlah pelanggan sistem EN

$$EN = \lambda_{eff} EW \tag{3.19}$$

atau

$$EN = EN_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \tag{3.20}$$

atau

Probabilitas *EN* dari *M*/*M*/*c*/GD/*K*/∞

$$EN = EN_q + \frac{\lambda\left(1 - \frac{\lambda^K}{c!c^{K-c}\mu^K} p_0\right)}{\mu}. \tag{3.21}$$

Contoh 3.6

Suatu sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/*K*/∞ laju datang λ sebesar tiga puluh dua pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar enam pelanggan per jam. Jumlah pelayan *c* sebesar lima, sedangkan jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebesar sembilan. Dapat kita cari probabilitasnya tidak ada pelanggan dalam sistem sebagai berikut :

dengan λ **= 32 pelanggan per jam**

μ **= 6 pelanggan per jam**

$c = 5$

$K = 9$

$\rho = \dfrac{\lambda}{c\mu}$ **= 1,06667**

maka dari rumus p_0 yaitu probabilitasnya tidak ada pelanggan dalam sistem

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left\{ \frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}} \right\}}, & \text{untuk } \dfrac{\lambda}{c\mu} \neq 1 \\[2ex] \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1+K-c)}, & \text{untuk } \dfrac{\lambda}{c\mu} = 1 \end{cases}$$

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left\{ \frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}} \right\}}, \quad \text{untuk } \frac{\lambda}{c\mu} \neq 1$$

$$= 0{,}00351$$

Contoh 3.7

Suatu sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/*K*/∞ laju datang λ sebesar tiga puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar enam pelanggan per jam. Jumlah pelayan *c* sebesar lima, sedangkan jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebesar sembilan. Dapat kita cari probabilitasnya tidak ada pelanggan dalam sistem sebagai berikut :

dengan λ = **30 pelanggan per jam**

μ = **6 pelanggan per jam**

c = **5**

K = **9**

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = 1$$

maka dari rumus p_0 yaitu probabilitasnya tidak ada pelanggan dalam sistem

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left\{ \frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}} \right\}}, & \text{untuk } \dfrac{\lambda}{c\mu} \neq 1 \\[2ex] \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1+K-c)}, & \text{untuk } \dfrac{\lambda}{c\mu} = 1 \end{cases}$$

$$p_0 = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1+K-c)}, \qquad \text{untuk } \frac{\lambda}{c\mu} = 1$$

$$= 0{,}00511$$

Contoh 3.8

Suatu sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/*K*/∞ laju datang λ sebesar tiga puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar enam pelanggan per jam. Jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebesar sembilan. Besarnya probabilitasnya tidak ada pelanggan dalam sistem sebagai fungsi dari jumlah pelayan *c* tampak seperti dibawah ini :

dengan λ = **30 pelanggan per jam**

μ = **6 pelanggan per jam**

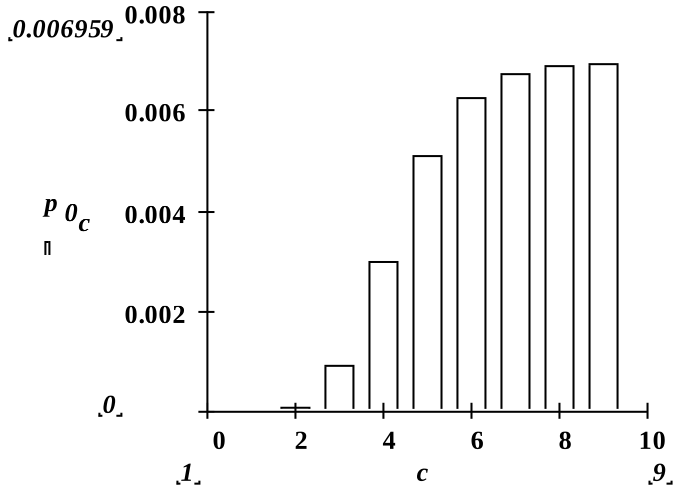
c = **1, 2, …,** K

K = **9**

$$p_0(c) = \begin{cases} \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left\{\frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right\}}, & \text{untuk } \dfrac{\lambda}{c\mu} \neq 1 \\[2em] \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1+K-c)}, & \text{untuk } \dfrac{\lambda}{c\mu} = 1 \end{cases}$$

Tabel 3.5. Hubungan probabilitas tidak ada pelanggan dalam sistem sebagai fungsi dari jumlah pelayan *c* dalam sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/*K*/∞, laju datang λ sebesar tiga puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar enam pelanggan per jam. Jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebesar sembilan.

c	rho	p_0
1	5,00000	0,00000
2	2,50000	0,00008
3	1,66667	0,00091
4	1,25000	0,00301
5	1,00000	0,00511
6	0,83333	0,00630
7	0,71429	0,00678
8	0,62500	0,00693
9	0,55556	0,00696



Gambar 3.5. Besarnya probabilitasnya tidak ada pelanggan dalam sistem sebagai fungsi dari jumlah pelayan *c* dalam sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/*K*/∞, laju datang λ sebesar tiga puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar enam pelanggan per jam. Jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebesar sembilan.

Contoh 3.9

Suatu sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/*K*/∞ laju datang λ sebesar tiga puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar enam pelanggan per jam, dan jumlah pelayan *c* sebesar tujuh. Jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebesar sembilan.

a. **Berapa besarnya probabilitas ada enam pelanggan dalam sistem?**
b. **Berapa besarnya probabilitas ada delapan pelanggan dalam sistem?**

Jawab :

a. Besarnya probabilitas ada n = 6 pelanggan dalam sistem,

dengan λ = 30 pelanggan per jam

μ = 6 pelanggan per jam

c = 7

K = 9

$\dfrac{\lambda}{c\mu}$ = 0,71429

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left\{ \frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}} \right\}}, & 0 \le n < c, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu} \ne 1 \\ \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1+K-c)}, & 0 \le n < c, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu} = 1 \\ \dfrac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left\{ \frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}} \right\}}, & c \le n \le K, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu} \ne 1 \\ \dfrac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1+K-c)}, & c \le n \le K, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu} = 1 \\ 0, & n > K \end{cases}$$

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left\{ \frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}} \right\}}, \qquad 0 \le n < c, \quad \frac{\lambda}{c\mu} \ne 1$$

= 0,14703

b. Besarnya probabilitas ada n = 8 pelanggan dalam sistem,

dengan λ = 30 pelanggan per jam

μ = 6 pelanggan per jam

c = 7

K = 9

$\frac{\lambda}{c\mu}$ = 0,71429

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left\{\frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right\}}, & 0\le n<c,\quad \dfrac{\lambda}{c\mu}\ne 1 \\[2ex] \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c(1+K-c)}, & 0\le n<c,\quad \dfrac{\lambda}{c\mu}=1 \\[2ex] \dfrac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n}\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left\{\frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right\}}, & c\le n\le K,\quad \dfrac{\lambda}{c\mu}\ne 1 \\[2ex] \dfrac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n}\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c(1+K-c)}, & c\le n\le K,\quad \dfrac{\lambda}{c\mu}=1 \\[2ex] 0, & n>K \end{cases}$$

$$p_n = \frac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n}\frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left\{\frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right\}},\quad c\le n\le K,\quad \frac{\lambda}{c\mu}\ne 1$$

= 0,07501

Contoh 3.10

Suatu sistem antrian $M/M/c$/GD/K/∞ laju datang λ sebesar tiga puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar enam pelanggan per jam, dan jumlah pelayan c sebesar lima. Jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebesar sembilan.

c. **Berapa besarnya probabilitas ada tiga pelanggan dalam sistem?**

d. **Berapa besarnya probabilitas ada tujuh pelanggan dalam sistem?**

Jawab :

a. **Besarnya probabilitas ada n = 3 pelanggan dalam sistem,**

dengan λ = **30 pelanggan per jam**

μ = **6 pelanggan per jam**

c = **5**

K = **9**

$$\frac{\lambda}{c\mu} = 1$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left\{ \frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}} \right\}}, & 0 \le n < c, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu} \ne 1 \\ \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1+K-c)}, & 0 \le n < c, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu} = 1 \\ \dfrac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n} \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left\{ \frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}} \right\}}, & c \le n \le K, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu} \ne 1 \\ \dfrac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n} \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1+K-c)}, & c \le n \le K, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu} = 1 \\ 0, & n > K \end{cases}$$

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1+K-c)}, \qquad 0 \le n < c, \quad \frac{\lambda}{c\mu} = 1$$

$= 0{,}10652$

b. Besarnya probabilitas ada n = 7 pelanggan dalam sistem,

dengan λ = **30 pelanggan per jam**

μ = **6 pelanggan per jam**

c = **5**

K = **9**

$\dfrac{\lambda}{c\mu}$ = **1**

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{c-1} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \dfrac{1}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^c \left\{ \dfrac{1-\left(\dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\dfrac{\lambda}{c\mu}} \right\}}, & 0 \le n < c, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu} \ne 1 \\ \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{c-1} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \dfrac{1}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^c (1+K-c)}, & 0 \le n < c, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu} = 1 \\ \dfrac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{c-1} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \dfrac{1}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^c \left\{ \dfrac{1-\left(\dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\dfrac{\lambda}{c\mu}} \right\}}, & c \le n \le K, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu} \ne 1 \\ \dfrac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} \dfrac{1}{\sum\limits_{n=0}^{c-1} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \dfrac{1}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^c (1+K-c)}, & c \le n \le K, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu} = 1 \\ 0, & n > K \end{cases}$$

$$p_n = \frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n} \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{c-1} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \dfrac{1}{c!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^c (1+K-c)}, \qquad c \le n \le K, \quad \frac{\lambda}{c\mu} = 1$$

= 0,13315

Contoh 3.11

Suatu sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/*K*/∞ laju datang λ sebesar tiga puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar enam pelanggan per jam, dan jumlah pelayan *c* sebesar tujuh. Jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebesar sembilan.

a. Berapa besarnya ekspektasi jumlah pelanggan antri EN_q dari sistem antrian ini?

b. **Berapa besarnya ekspektasi waktu antri *ED* dari sistem antrian ini?**

c. **Berapa besarnya ekspektasi waktu sistem *EW* dari sistem antrian ini?**

d. **Berapa besarnya ekspektasi jumlah pelanggan sistem *EN* dari sistem antrian ini?**

Jawab :

a. **Besarnya ekspektasi jumlah pelanggan antri EN_q dari sistem antrian ini, dengan**

λ = **30 pelanggan per jam**

μ = **6 pelanggan per jam**

c = **7**

K = **9**

$\frac{\lambda}{c\mu}$ = **0,71429**

$$EN_q = \begin{cases} p_0 \frac{1}{c!} \frac{\lambda^c}{\mu^c} \frac{\lambda}{c\mu} \left\{ \frac{1-(K-c+1)\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c} + (K-c)\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2} \right\}, & \frac{\lambda}{c\mu} \neq 1 \\ p_0 \frac{1}{c!} \frac{\lambda^c}{\mu^c} \left\{ \frac{K-c}{2}(1+K-c) \right\}, & \frac{\lambda}{c\mu} = 1 \end{cases}$$

$$EN_q = p_0 \frac{1}{c!} \frac{\lambda^c}{\mu^c} \frac{\lambda}{c\mu} \left\{ \frac{1-(K-c+1)\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c} + (K-c)\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2} \right\}$$

= **0,18218 pelanggan.**

di mana

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left\{\frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right\}}, \quad \text{untuk } \frac{\lambda}{c\mu}\neq 1$$

$$= 0{,}00678$$

dan

$$\frac{1}{c!}\frac{\lambda^c}{\mu^c}\frac{\lambda}{c\mu}\left\{\frac{1-(K-c+1)\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c}+(K-c)\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2}\right\} = 26{,}88948$$

b. Besarnya ekspektasi waktu antri *ED* dari sistem antrian ini, dengan

λ = 30 pelanggan per jam

μ = 6 pelanggan per jam

c = 7

K = 9

$\frac{\lambda}{c\mu}$ = 0,71429

$$ED = \frac{EN_q}{\lambda_{eff}} = \frac{EN_q}{\lambda\left(1-\frac{\lambda^K}{c!c^{K-c}\mu^K}p_0\right)}$$

$$= 0{,}006416 \text{ jam,}$$

di mana

$$EN_q = p_0\frac{1}{c!}\frac{\lambda^c}{\mu^c}\frac{\lambda}{c\mu}\left\{\frac{1-(K-c+1)\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c}+(K-c)\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2}\right\}$$

$$= 0{,}18218 \text{ pelanggan,}$$

dan

$$\lambda_{eff} = \lambda\left(1 - \frac{\lambda^K}{c!c^{K-c}\mu^K} p_0\right) = 28{,}39255$$

c. **Besarnya ekspektasi waktu sistem *EW* dari sistem antrian ini, dengan**

λ = **30 pelanggan per jam**

μ = **6 pelanggan per jam**

c = **7**

K = **9**

$\dfrac{\lambda}{c\mu}$ = **0,71429**

$$EW = ED + \frac{1}{\mu} = \frac{EN_q}{\lambda\left(1 - \frac{\lambda^K}{c!c^{K-c}\mu^K} p_0\right)} + \frac{1}{\mu} = 0{,}17308 \text{ jam}$$

di mana

ED = **0,006416 jam**

$\dfrac{1}{\mu}$ = **0,166667 jam.**

d. **Besarnya ekspektasi jumlah pelanggan sistem *EN* dari sistem antrian ini, dengan**

λ = **30 pelanggan per jam**

μ = **6 pelanggan per jam**

c = **7**

K = **9**

$\dfrac{\lambda}{c\mu}$ = **0,71429**

$EN = \lambda_{eff} EW$ = **0,17308 pelanggan,**

di mana

λ_{eff} = **28,39255 pelanggan per jam**

EW = **0,17308 jam.**

Contoh 3.12

Suatu sistem antrian $M/M/c$/GD/K/∞ laju datang λ sebesar tiga puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar enam pelanggan per jam, dan jumlah pelayan c sebesar lima. Jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebesar sembilan.

a. Berapa besarnya ekspektasi jumlah pelanggan antri EN_q dari sistem antrian ini?

b. Berapa besarnya ekspektasi waktu antri ED dari sistem antrian ini?

c. Berapa besarnya ekspektasi waktu sistem EW dari sistem antrian ini?

d. Berapa besarnya ekspektasi jumlah pelanggan sistem EN dari sistem antrian ini?

Jawab :

a. Besarnya ekspektasi jumlah pelanggan antri EN_q dari sistem antrian ini, dengan

λ = **30 pelanggan per jam**

μ = **6 pelanggan per jam**

c = **5**

K = **9**

$\dfrac{\lambda}{c\mu}$ = **1**

$$EN_q = \begin{cases} p_0 \dfrac{1}{c!}\dfrac{\lambda^c}{\mu^c}\dfrac{\lambda}{c\mu}\left\{\dfrac{1-(K-c+1)\left(\dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c}+(K-c)\left(\dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{\left(1-\dfrac{\lambda}{c\mu}\right)^2}\right\}, & \dfrac{\lambda}{c\mu}\neq 1 \\ \\ p_0 \dfrac{1}{c!}\dfrac{\lambda^c}{\mu^c}\left\{\dfrac{K-c}{2}(1+K-c)\right\}, & \dfrac{\lambda}{c\mu}=1 \end{cases}$$

$$EN_q = p_0 \frac{1}{c!} \frac{\lambda^c}{\mu^c} \left\{ \frac{K-c}{2}(1+K-c) \right\}$$

$= 1,33149$ **pelanggan.**

di mana

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c (1+K-c)}, \qquad \text{untuk } \frac{\lambda}{c\mu} = 1$$

$= 0,00511$

dan

$$\frac{1}{c!} \frac{\lambda^c}{\mu^c} \left\{ \frac{K-c}{2}(1+K-c) \right\} = 260,41667$$

b. **Besarnya ekspektasi waktu antri *ED* dari sistem antrian ini, dengan**

λ = **30 pelanggan per jam**

μ = **6 pelanggan per jam**

c = **5**

K = **9**

$\frac{\lambda}{c\mu}$ = **1**

$$ED = \frac{EN_q}{\lambda_{eff}} = \frac{EN_q}{\lambda\left(1 - \frac{\lambda^K}{c!c^{K-c}\mu^K} p_0\right)}$$

$= 0,051200$ **jam,**

di mana

$$EN_q = p_0 \frac{1}{c!} \frac{\lambda^c}{\mu^c} \left\{ \frac{K-c}{2}(1+K-c) \right\}$$

$= 1,33149$ **pelanggan,**

dan

$$\lambda_{eff} = \lambda\left(1 - \frac{\lambda^K}{c!c^{K-c}\mu^K} p_0\right) = 26,00554$$

c. **Besarnya ekspektasi waktu sistem *EW* dari sistem antrian ini, dengan**

λ = **30 pelanggan per jam**

μ = **6 pelanggan per jam**

c = **5**

K = **9**

$\dfrac{\lambda}{c\mu} = 1$

$$EW = ED + \frac{1}{\mu} = \frac{EN_q}{\lambda\left(1 - \dfrac{\lambda^K}{c!c^{K-c}\mu^K}p_0\right)} + \frac{1}{\mu} = 0{,}21787 \text{ jam}$$

di mana

ED = **0,05120 jam**

$\dfrac{1}{\mu}$ = **0,16667 jam.**

d. **Besarnya ekspektasi jumlah pelanggan sistem *EN* dari sistem antrian ini, dengan**

λ = **30 pelanggan per jam**

μ = **6 pelanggan per jam**

c = **5**

K = **9**

$\dfrac{\lambda}{c\mu} = 1$

$EN = \lambda_{eff}\,EW$ = **5,66574 pelanggan,**

di mana

λ_{eff} = **26,00554 pelanggan per jam**

EW = **0,21787 jam.**

3.3. RANGKUMAN

Rangkuman

- **Sistem antrian $M/M/c/\text{GD}/\infty/\infty$: yaitu sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu layannya berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang berangkat berdistribusi Poisson, sedangkan jumlah pelayan paralelnya sebanyak *c*, disiplin pelayanannya umum, jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebanyak takhingga, dan jumlah populasi pelanggan takhingga.**

- $$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right)}$$
$$= \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right)}$$

- $$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\dfrac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right)}, & n \le c \\ \dfrac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n}\dfrac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{c\mu}{c\mu-\lambda}\right)}, & n \ge c \end{cases}$$

- $$EN_q = \frac{\lambda^c}{c!\,\mu^c}\frac{\lambda}{c\mu}\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2}\frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right)}$$

- $$ED = \frac{EN_q}{\lambda_{eff}}$$

$$= \frac{\lambda^c}{c!\mu^c}\frac{1}{c\mu}\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2}\frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right)}$$

- $$EW = ED + \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{\lambda^c}{c!\mu^c}\frac{1}{c\mu}\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2}\frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right)}+\frac{1}{\mu}$$

- $$EN = \lambda EW$$

- **Sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/*K*/∞ : yaitu sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu layannya berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang berangkat berdistribusi Poisson, sedangkan jumlah pelayan paralelnya sebanyak *c*, disiplin pelayanannya umum, jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebanyak *K*, dan jumlah populasi pelanggan takhingga.**

- $$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left\{\dfrac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right\}}, & \text{untuk } \dfrac{\lambda}{c\mu}\neq 1 \\[2ex] \dfrac{1}{\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c(1+K-c)}, & \text{untuk } \dfrac{\lambda}{c\mu}=1 \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n}\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left\{\frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right\}}, & 0\le n<c, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu}\ne 1 \\ \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n}\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c(1+K-c)}, & 0\le n<c, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu}=1 \\ \dfrac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n}\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c\left\{\frac{1-\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{1-\frac{\lambda}{c\mu}}\right\}}, & c\le n\le K, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu}\ne 1 \\ \dfrac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n}\dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}+\frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c(1+K-c)}, & c\le n\le K, \quad \dfrac{\lambda}{c\mu}=1 \\ 0, & n>K \end{cases}$$

$$EN_q = \begin{cases} p_0\dfrac{1}{c!}\dfrac{\lambda^c}{\mu^c}\dfrac{\lambda}{c\mu}\left\{\dfrac{1-(K-c+1)\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c}+(K-c)\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{K-c+1}}{\left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2}\right\}, & \dfrac{\lambda}{c\mu}\ne 1 \\ p_0\dfrac{1}{c!}\dfrac{\lambda^c}{\mu^c}\left\{\dfrac{K-c}{2}(1+K-c)\right\}, & \dfrac{\lambda}{c\mu}=1 \end{cases}$$

- $\lambda_{eff} = \lambda\left(1-\dfrac{\lambda^K}{c!c^{K-c}\mu^K}\,p_0\right)$
- $EN = EN_q + \dfrac{\lambda_{eff}}{\mu} = EN_q + \dfrac{\lambda\left(1-\frac{\lambda^K}{c!c^{K-c}\mu^K}\,p_0\right)}{\mu}$

- $ED = \dfrac{EN_q}{\lambda_{eff}} = \dfrac{EN_q}{\lambda\left(1 - \dfrac{\lambda^K}{c!c^{K-c}\mu^K}\,p_0\right)}$

- $EW = ED + \dfrac{1}{\mu}$

3.4. LATIHAN

Latihan

Latihan 3.1

Suatu sistem antrian $M/M/c$/GD/∞/∞ laju datang λ sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar lima pelanggan per jam, dan jumlah pelayan c sebesar delapan.

a. Berapa probabilitasnya tidak ada pelanggan dalam sistem?

b. Berapa probabilitasnya ada lima pelanggan dalam sistem?

c. Berapa probabilitasnya ada sepuluh pelanggan dalam sistem?

d. Berapa ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian?

e. Berapa ekspektasi waktu antri?

f. Berapa ekspektasi waktu sistem?

g. Berapa ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem?

[Jawab : a. 0,01816, b. 0,15499, c. 0,00738, d. 0,05904 pelanggan, e. 0,00295 jam, f. 0,20295 jam, g. 4,05904 pelanggan.]

Latihan 3.2

Suatu sistem antrian $M/M/c$/GD/K/∞ laju datang λ sebesar empat puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar lima pelanggan per jam, dan jumlah pelayan c sebesar sembilan. Jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebesar sepuluh.

a. Berapa besarnya ekspektasi jumlah pelanggan antri EN_q dari sistem antrian ini?

b. Berapa besarnya ekspektasi waktu antri *ED* dari sistem antrian ini?
c. Berapa besarnya ekspektasi waktu sistem *EW* dari sistem antrian ini?
d. Berapa besarnya ekspektasi jumlah pelanggan sistem *EN* dari sistem antrian ini?

[Jawab : a. 0,13338 pelanggan, b. 0,003848 jam, c. 0,20385 jam, d. 7,06637 pelanggan.]

Latihan 3.3

Suatu sistem antrian *M*/*M*/*c*/GD/*K*/∞ laju datang λ sebesar empat puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan μ sebesar lima pelanggan per jam, dan jumlah pelayan *c* sebesar delapan. Jumlah pelanggan maksimum yang diperbolehkan dalam sistem sebesar sepuluh.

a. Berapa besarnya ekspektasi jumlah pelanggan antri EN_q dari sistem antrian ini?
b. Berapa besarnya ekspektasi waktu antri *ED* dari sistem antrian ini?
c. Berapa besarnya ekspektasi waktu sistem *EW* dari sistem antrian ini?
d. Berapa besarnya ekspektasi jumlah pelanggan sistem *EN* dari sistem antrian ini?

[Jawab : a. 0,48038 pelanggan, b. 0,01430 jam, c. 0,21430 jam, d. 7,19936 pelanggan.]

3.5. UMPAN BALIK

Umpan balik

- Cocokkan hasil jawaban Anda dari latihan-latihan diatas dengan kunci jawaban, kemudian hitung tingkat pemguasaan Anda dengan rumus

  Tingkat penguasaan =

$$\frac{\text{Jumlah jawaban latihan yang benar}}{\text{Jumlah latihan}} \times 100\%$$

- Arti besarnya tingkat penguasaan :

$90\% \le \text{Tingkat penguasaan} \le 100\%$ = Baik sekali

$80\% \le \text{Tingkat penguasaan} < 90\%$ = Baik

$70\% \le \text{Tingkat penguasaan} < 80\%$ = Cukup

$0\% \le \text{Tingkat penguasaan} < 70\%$ = Kurang

- Jika skor yang Anda peroleh sebesar 80% atau lebih maka Anda dapat meneruskan ke modul berikutnya. Apabila skor yang Anda peroleh kurang dari 80% maka bacalah kembali materi modul ini, terutama hal-hal yang belum Anda kuasai!

3.6. DAFTAR PUSTAKA

Daftar pustaka

1. Gross, D., Carl M. Harris (1974). *Fundamentals of Queueing Theory*. New York : John Wiley & Sons, Inc.
2. Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems, Volume I : Theory*. New York : John Wiley & Sons, Inc.