

## 5. SISTEM ANTRIAN *M/G/c*

### Sistem antrian *M/G/c*

Dalam bahasan pokok ini akan dibahas :

- Sistem antrian *M/G/c* : yaitu sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu layannya berdistribusi umum (*general*), sedangkan jumlah pelayannya sebanyak *c*.  
Sistem antrian *M/G/c* termasuk yang cukup sulit, didalam modul ini akan diutarakan hasil-hasil yang telah didapat didalam sistem antrian *M/G/c* ini.

### NOTASI-NOTASI YANG PENTING :

- $\lambda$  menyatakan laju datang (*arrival rate*) yaitu jumlah pelanggan yang datang rata-rata per satuan waktu
- $\mu$  menyatakan laju layan yaitu jumlah pelanggan yang telah dilayani rata-rata per satuan waktu
- $\rho$  menyatakan faktor utilisasi =  $\frac{\lambda}{c\mu}$
- $p_n$  menyatakan probabilitas ada *n* pelanggan dalam sistem antrian pada sembarang waktu di mana keadaan sistem antriannya mapan (*steady state*),  $p_n$  menyatakan juga ekspektasi proporsi waktu bahwa sistem berada dengan jumlah pelanggan sebanyak *n*.

Keadaan mapan (*steady state*) berarti distribusi probabilitas jumlah pelanggan dalam antrian dan distribusi probabilitas jumlah pelanggan dalam sistem tidak bergantung waktu.

*II* probabilitas pelanggan mengantri dari hasil penghampiran (*approximation*)

*EN* menyatakan ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem

*EN<sub>q</sub>* menyatakan ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian

*EN<sub>s</sub>* menyatakan ekspektasi jumlah pelanggan dalam pelayan

*EW* menyatakan ekspektasi waktu sistem yaitu waktu rata-rata pelanggan berada dalam sistem

*ED* menyatakan ekspektasi waktu antri yaitu waktu rata-rata pelanggan berada dalam antrian

*ET* menyatakan ekspektasi waktu antardatang pelanggan, yaitu besarnya sama dengan  $\frac{1}{\lambda}$

*ES* menyatakan ekspektasi waktu layan pelanggan, singkatnya ekspektasi waktu layan, yaitu besarnya sama dengan  $\frac{1}{\mu}$ ,

atau menyatakan momen pertama waktu layan pelanggan

*ES<sup>2</sup>* menyatakan momen kedua waktu layan pelanggan

*VS* menyatakan variansi waktu layan pelanggan,  
$$VS = ES^2 - (ES)^2$$

## **5.1. SISTEM ANTRIAN *M/G/c***

Penghampiran (*approximation*) untuk probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem  $p_0$  dari sistem antrian *M/G/c*,

**Probabilitas nol dari M/G/c**

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}} \quad (5.1)$$

Penghampiran untuk probabilitas ada  $n$  pelanggan dalam sistem  $p_n$  yaitu

**Probabilitas  $n$  dari M/G/c**

$$p_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} p_0, \quad n = 1, \dots, c - 1. \quad (5.2)$$

Penghampiran untuk probabilitas pelanggan mengantri sebesar

$$\Pi = \sum_{k=c}^{\infty} p_k = \frac{\rho}{(1-\rho)} p_{c-1}. \quad (5.3)$$

Penghampiran untuk ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian  $EN_q$  sebesar

**$EN_q$  dari M/G/c**

$$EN_q = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2(1-\rho)}. \quad (5.4)$$

Penghampiran untuk ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem  $EN$  sebesar

**$EN$  dari M/G/c**

$$EN = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda}{\mu}. \quad (5.5)$$

Besarnya penghampiran untuk ekspektasi waktu antri  $ED$

**$ED$  dari M/G/c**

$$ED = \frac{EN_q}{\lambda} = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2\lambda(1-\rho)}. \quad (5.6)$$

**EW dari  
M/G/c**

Besarnya penghampiran untuk ekspektasi waktu sistem  $EW$

$$EW = ED + \frac{1}{\mu} = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}. \quad (5.7)$$

**Contoh 5.1**

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam. Berapa besarnya penghampiran untuk probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem  $p_0$  ?

Jawab :

$$c = 6$$

$$\lambda = 20 \text{ pelanggan per jam}$$

$$\mu = 5 \text{ pelanggan per jam atau } ES = 0,2 \text{ jam}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = 4 \quad \frac{\lambda}{c\mu} = 0,66667$$

$$VS = 0,04 \text{ jam}^2 \text{ sehingga } ES^2 = VS + (ES)^2 = 0,08 \text{ jam}^2.$$

besarnya penghampiran untuk probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}} = 0,01669.$$

**Contoh 5.2**

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam,

variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam. Berapa penghampiran untuk probabilitas ada  $n = c-4$  pelanggan dalam sistem  $p_{c-4}$  ?

Jawab :

$$c = 6$$

$$\lambda = 20 \text{ pelanggan per jam}$$

$$\mu = 5 \text{ pelanggan per jam atau } ES = 0,2 \text{ jam}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = 4 \quad \frac{\lambda}{c\mu} = 0,66667$$

$$VS = 0,04 \text{ jam}^2 \text{ sehingga } ES^2 = VS + (ES)^2 = 0,08 \text{ jam}^2.$$

$$c-4 = 2$$

$$p_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} p_0, \quad n = 1, \dots, c-1$$

di mana

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}$$

$$= 0,01669$$

maka

$$p_2 = 0,133489.$$

### Contoh 5.3

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam. Berapa penghampiran untuk probabilitas pelanggan mengantri?

**Jawab :**

$$c = 6$$

$$\lambda = 20 \text{ pelanggan per jam}$$

$$\mu = 5 \text{ pelanggan per jam atau } ES = 0,2 \text{ jam}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = 4 \quad \frac{\lambda}{c\mu} = 0,66667$$

$$VS = 0,04 \text{ jam}^2 \text{ sehingga } ES^2 = VS + (ES)^2 = 0,08 \text{ jam}^2.$$

**Penghampiran untuk probabilitas pelanggan mengantri**

$$\Pi = \sum_{k=c}^{\infty} p_k = \frac{\rho}{(1-\rho)} p_{c-1}$$

$$= 0,28476 \quad \text{atau bisa dihitung dari}$$

$$1 - (p_0 + p_1 + \dots + p_{c-1}) = 1 - 0,71524 = 0,28476$$

**di mana**

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}$$

$$= 0,01669$$

$$p_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} p_0, \quad n = 1, \dots, c - 1.$$

#### **Contoh 5.4**

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam. Berapa besarnya penghampiran untuk ekspektasi jumlah pelanggan antri  $EN_q$  dari sistem antrian ini?

Jawab :

$$c = 6$$

$$\lambda = 20 \text{ pelanggan per jam}$$

$$\mu = 5 \text{ pelanggan per jam atau } ES = 0,2 \text{ jam}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = 4 \quad \rho = \frac{\lambda}{c\mu} = 0,66667$$

$$VS = 0,04 \text{ jam}^2 \text{ sehingga } ES^2 = VS + (ES)^2 = 0,08 \text{ jam}^2.$$

Besarnya penghampiran untuk ekspektasi jumlah pelanggan antri  $EN_q$  dari sistem antrian ini

$$\begin{aligned} EN_q &= \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2(1-\rho)} \\ &= 0,56952 \text{ pelanggan,} \end{aligned}$$

di mana

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{k=c}^{\infty} p_k = \frac{\rho}{(1-\rho)} p_{c-1} \\ &= 0,28476. \end{aligned}$$

### Contoh 5.5

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam. Berapa besarnya penghampiran untuk penghampiran untuk ekspektasi jumlah pelanggan sistem  $EN$  dari sistem antrian ini?

Jawab :

$$c = 6$$

$$\lambda = 20 \text{ pelanggan per jam}$$

$$\mu = 5 \text{ pelanggan per jam atau } ES = 0,2 \text{ jam}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = 4 \quad \rho = \frac{\lambda}{c\mu} = 0,66667$$

$$VS = 0,04 \text{ jam}^2 \text{ sehingga } ES^2 = VS + (ES)^2 = 0,08 \text{ jam}^2.$$

Besarnya penghampiran untuk ekspektasi jumlah pelanggan sistem  $EN$  dari sistem antrian ini

$$\begin{aligned} EN &= \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda}{\mu} \\ &= 4,56952 \text{ pelanggan,} \end{aligned}$$

di mana

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{k=c}^{\infty} p_k = \frac{\rho}{(1-\rho)} p_{c-1} \\ &= 0,28476. \end{aligned}$$

#### Contoh 5.6

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam. Berapa besarnya penghampiran untuk ekspektasi waktu antri  $ED$  dari sistem antrian ini?

Jawab :

$$c = 6$$

$$\lambda = 20 \text{ pelanggan per jam}$$

$$\mu = 5 \text{ pelanggan per jam atau } ES = 0,2 \text{ jam}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = 4 \quad \rho = \frac{\lambda}{c\mu} = 0,66667$$

$$VS = 0,04 \text{ jam}^2 \text{ sehingga } ES^2 = VS + (ES)^2 = 0,08 \text{ jam}^2.$$

Besarnya penghampiran untuk ekspektasi waktu antri  $ED$  dari sistem antrian ini



$$ED = \frac{EN_q}{\lambda} = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2\lambda(1-\rho)}$$

$$= 0,02848 \text{ jam,}$$

di mana

$$\Pi = \sum_{k=c}^{\infty} p_k = \frac{\rho}{(1-\rho)} p_{c-1}$$

$$= 0,28476.$$

**Contoh 5.7**

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam. Berapa besarnya penghampiran untuk ekspektasi waktu sistem  $EW$  dari sistem antrian ini?

Jawab :

$$c = 6$$

$$\lambda = 20 \text{ pelanggan per jam}$$

$$\mu = 5 \text{ pelanggan per jam atau } ES = 0,2 \text{ jam}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = 4 \quad \rho = \frac{\lambda}{c\mu} = 0,66667$$

$$VS = 0,04 \text{ jam}^2 \text{ sehingga } ES^2 = VS + (ES)^2 = 0,08 \text{ jam}^2.$$

Besarnya penghampiran untuk ekspektasi waktu sistem  $EW$  dari sistem antrian ini

$$EW = ED + \frac{1}{\mu} = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$$

$$= 0,22848 \text{ jam,}$$

di mana

$$\Pi = \sum_{k=c}^{\infty} p_k = \frac{\rho}{(1-\rho)} p_{c-1} = 0,28476.$$

**Contoh 5.8**

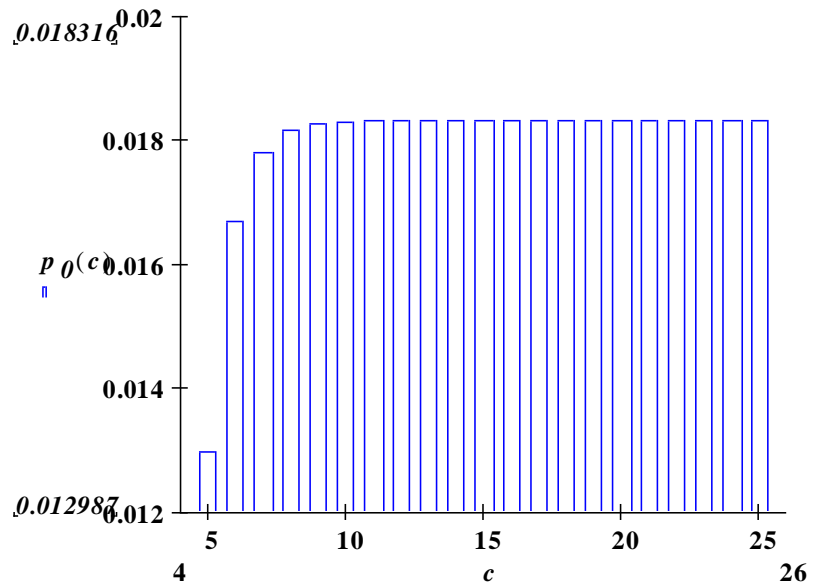
Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam. Hubungan penghampiran untuk probabilitas nol / tidak ada pelanggan dalam sistem sebagai fungsi dari jumlah pelayan  $c$  dalam sistem antrian ini tampak di bawah ini.

Besarnya penghampiran untuk probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem sebagai fungsi dari  $c$  :

$$p_0(c) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}$$

**Tabel 5.1. Hubungan penghampiran untuk probabilitas nol / tidak ada pelanggan dalam sistem sebagai fungsi dari jumlah pelayan  $c$  dalam sistem antrian  $M/G/c$  yang mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam.**

$c$	Probabilitas nol pelanggan
5	0,01299
6	0,01669
7	0,01781
8	0,01816
9	0,01827
10	0,01830
11	0,01831
12	0,01831
13	0,01832
14	0,01832
15	0,01832
16	0,01832
17	0,01832
18	0,01832
19	0,01832
20	0,01832
21	0,01832
22	0,01832
23	0,01832
24	0,01832
25	0,01832



**Gambar 5.1.** Hubungan penghampiran untuk probabilitas nol / tidak ada pelanggan dalam sistem sebagai fungsi dari jumlah pelayan  $c$  dalam sistem antrian  $M/G/c$  yang mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam.

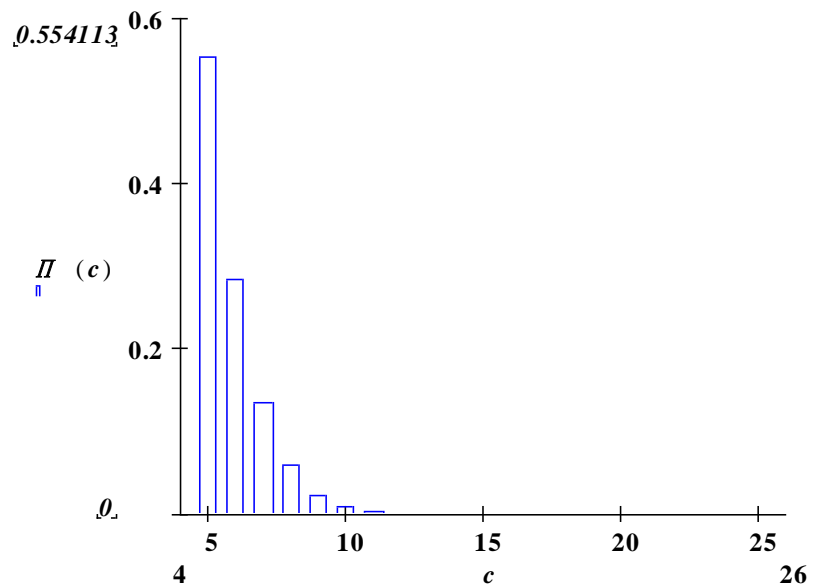
**Contoh 5.9**

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam. Hubungan penghampiran untuk probabilitas pelanggan mengantri sebagai fungsi jumlah pelayan  $c$

$$\Pi(c) = \sum_{k=c}^{\infty} p_k = \frac{\rho}{(1-\rho)} p_{c-1}$$

Tabel 5.2. Hubungan penghampiran untuk probabilitas pelanggan mengantri sebagai fungsi dari jumlah pelayan  $c$  dalam sistem antrian  $M/G/c$  yang mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam.

$c$	Probabilitas pelanggan mengantri
5	0,55411
6	0,28476
7	0,13511
8	0,05904
9	0,02376
10	0,00881
11	0,00302
12	0,00096
13	0,00029
14	0,00008
15	0,00002
16	0,00001
17	0,00000
18	0,00000
19	0,00000
20	0,00000
21	0,00000
22	0,00000
23	0,00000
24	0,00000
25	0,00000



**Gambar 5.2.** Hubungan penghampiran untuk probabilitas pelanggan mengantri sebagai fungsi dari jumlah pelayan  $c$  dalam sistem antrian  $M/G/c$  yang mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam.

**Contoh 5.10**

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam. Hubungan penghampiran untuk ekspektasi jumlah pelanggan antri  $EN_q$  sebagai fungsi jumlah pelayan  $c$  tampak di bawah ini. Besarnya penghampiran untuk ekspektasi jumlah pelanggan antri  $EN_q$  dari sistem antrian ini :

$$EN_q = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2(1-\rho)}$$

di mana

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

$$\Pi = \sum_{k=c}^{\infty} p_k = \frac{\rho}{(1-\rho)} p_{c-1}$$

$$p_{c-1} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{(c-1)!} p_0$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}$$

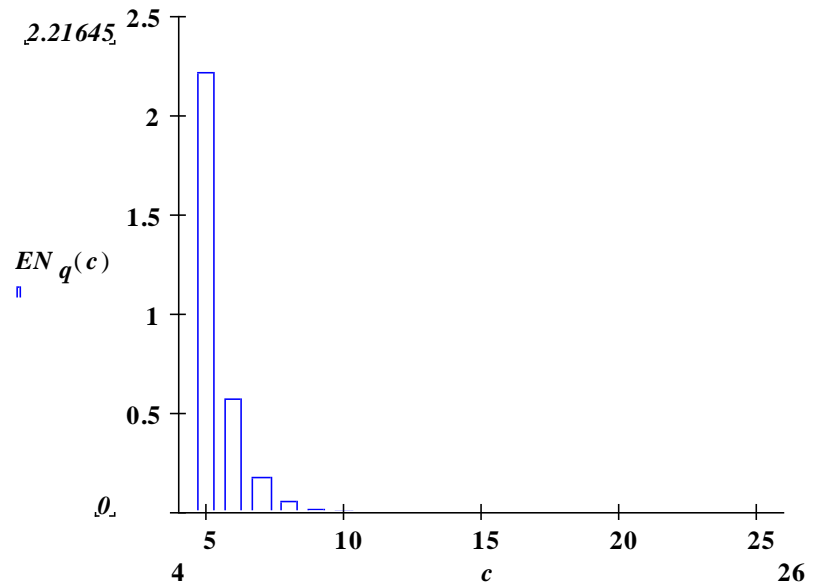
$$EN_q(c) = \frac{\frac{\lambda}{c\mu} \frac{ES^2}{(ES)^2} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{\left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right) (c-1)!} \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}}{2 \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2 \frac{ES^2}{(ES)^2} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{(c-1)!} \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}}{2 \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)^2}$$

**Tabel 5.3. Hubungan penghampiran untuk ekspektasi jumlah pelanggan antri  $EN_q$  sebagai fungsi dari jumlah pelayan  $c$  dalam sistem antrian  $M/G/c$  yang mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam.**

$c$	$EN_q$
5	2,21645
6	0,56952
7	0,18015
8	0,05904
9	0,01901
10	0,00588
11	0,00173
12	0,00048
13	0,00013
14	0,00003
15	0,00001
16	0,00000
17	0,00000
18	0,00000
19	0,00000
20	0,00000
21	0,00000
22	0,00000
23	0,00000
24	0,00000
25	0,00000





**Gambar 5.3.** Hubungan penghampiran untuk untuk ekspektasi jumlah pelanggan antri  $EN_q$  sebagai fungsi dari jumlah pelayan  $c$  dalam sistem antrian  $M/G/c$  yang mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam.

**Contoh 5.11**

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam. Hubungan penghampiran untuk ekspektasi jumlah pelanggan sistem  $EN$  sebagai fungsi jumlah pelayan  $c$  tampak di bawah ini. Besarnya penghampiran untuk ekspektasi jumlah pelanggan sistem  $EN$  dari sistem antrian ini :

$$EN = EN_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda}{\mu}$$

di mana

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

$$\Pi = \sum_{k=c}^{\infty} p_k = \frac{\rho}{(1-\rho)} p_{c-1}$$

$$p_{c-1} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{(c-1)!} p_0$$

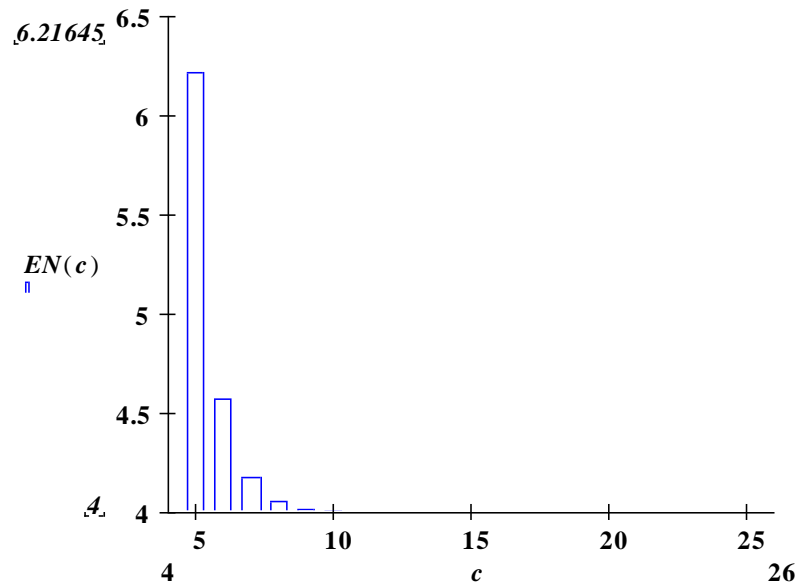
$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}$$

$$EN(c) = \frac{\frac{\lambda}{c\mu} \frac{ES^2}{(ES)^2} \frac{\lambda}{c\mu} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{(c-1)!} \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}}{2 \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)} + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2 \frac{ES^2}{(ES)^2} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{(c-1)!} \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}}{2 \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$$

Tabel 5.4. Hubungan penghampiran untuk ekspektasi jumlah pelanggan sistem  $EN$  sebagai fungsi dari jumlah pelayan  $c$  dalam sistem antrian  $M/G/c$  yang mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam.

$c$	$EN$
5	6,21645
6	4,56952
7	4,18015
8	4,05904
9	4,01901
10	4,00588
11	4,00173
12	4,00048
13	4,00013
14	4,00003
15	4,00001
16	4,00000
17	4,00000
18	4,00000
19	4,00000
20	4,00000
21	4,00000
22	4,00000
23	4,00000
24	4,00000



**Gambar 5.4.** Hubungan penghampiran untuk untuk ekspektasi jumlah pelanggan sistem  $EN$  sebagai fungsi dari jumlah pelayan  $c$  dalam sistem antrian  $M/G/c$  yang mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam.

**Contoh 5.12**

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam. Hubungan penghampiran untuk ekspektasi waktu antri  $ED$  sebagai fungsi jumlah pelayan  $c$  tampak di bawah ini. Besarnya penghampiran untuk ekspektasi waktu antri  $ED$  dari sistem antrian ini :

$$ED = \frac{EN_q}{\lambda} = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2\lambda(1-\rho)}$$

di mana

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

$$\Pi = \sum_{k=c}^{\infty} p_k = \frac{\rho}{(1-\rho)} p_{c-1}$$

$$p_{c-1} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{(c-1)!} p_0$$

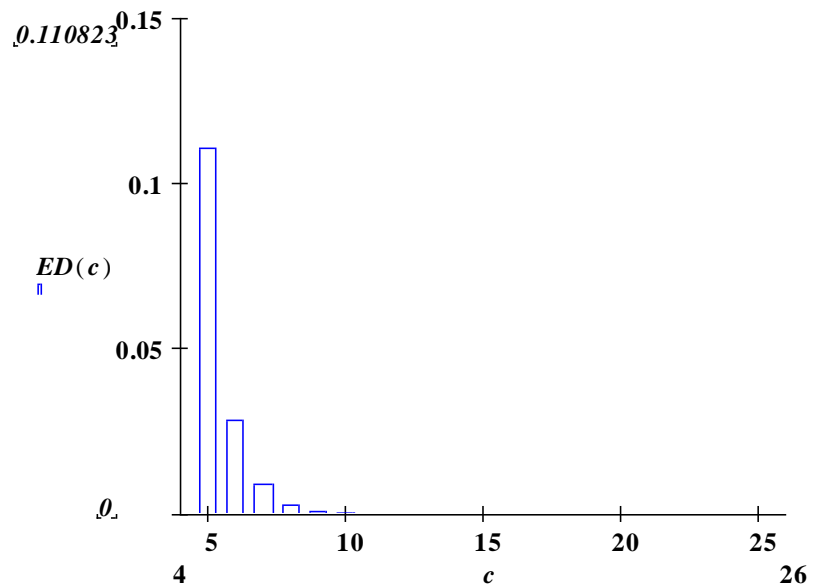
$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}$$

$$ED(c) = \frac{\frac{\lambda}{c\mu} \frac{ES^2}{(ES)^2} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{(c-1)!} \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}}{2\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2 \frac{ES^2}{(ES)^2} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{(c-1)!} \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}}{2\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)^2}$$

Tabel 5.5. Hubungan penghampiran untuk ekspektasi waktu antri  $ED$  sebagai fungsi dari jumlah pelayan  $c$  dalam sistem antrian  $M/G/c$  yang mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam.

$c$	$ED$
5	0,11082
6	0,02848
7	0,00901
8	0,00295
9	0,00095
10	0,00029
11	0,00009
12	0,00002
13	0,00001
14	0,00000
15	0,00000
16	0,00000
17	0,00000
18	0,00000
19	0,00000
20	0,00000
21	0,00000
22	0,00000
23	0,00000
24	0,00000
25	0,00000



**Gambar 5.5.** Hubungan penghampiran untuk untuk ekspektasi waktu antri  $ED$  sebagai fungsi dari jumlah pelayan  $c$  dalam sistem antrian  $M/G/c$  yang mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam.

**Contoh 5.13**

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam. Hubungan penghampiran untuk ekspektasi waktu sistem  $EW$  sebagai fungsi jumlah pelayan  $c$  tampak di bawah ini. Besarnya penghampiran untuk ekspektasi waktu antri  $ED$  dari sistem antrian ini :

$$EW = ED + \frac{1}{\mu} = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$$

di mana

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

$$\Pi = \sum_{k=c}^{\infty} p_k = \frac{\rho}{(1-\rho)} p_{c-1}$$

$$p_{c-1} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{(c-1)!} p_0$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}$$

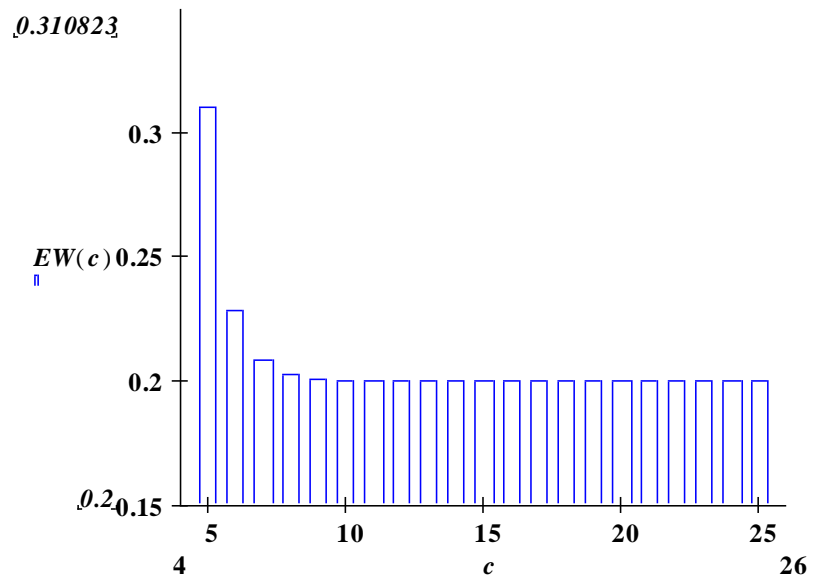
$$EW(c) = \frac{\frac{\lambda}{c\mu} \frac{ES^2}{(ES)^2} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{(c-1)!} \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}}{2\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)} + \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^2 \frac{ES^2}{(ES)^2} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{(c-1)!} \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}}{2\lambda \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)^2} + \frac{1}{\mu}$$



**Tabel 5.6. Hubungan penghampiran untuk ekspektasi waktu sistem  $EW$  sebagai fungsi dari jumlah pelayan  $c$  dalam sistem antrian  $M/G/c$  yang mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam.**

$c$	$EW$
5	0,31082
6	0,22848
7	0,20901
8	0,20295
9	0,20095
10	0,20029
11	0,20009
12	0,20002
13	0,20001
14	0,20000
15	0,20000
16	0,20000
17	0,20000
18	0,20000
19	0,20000
20	0,20000
21	0,20000
22	0,20000
23	0,20000
24	0,20000
25	0,20000



**Gambar 5.6.** Hubungan penghampiran untuk untuk ekspektasi waktu sistem  $EW$  sebagai fungsi dari jumlah pelayan  $c$  dalam sistem antrian  $M/G/c$  yang mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar dua puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar lima pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per lima jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,04 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar enam.

## 5.2. RANGKUMAN

### Rangkuman

- Sistem antrian  $M/G/c$  : yaitu sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, waktu layannya berdistribusi umum (*general*), sedangkan jumlah pelayannya sebanyak  $c$ . Sistem antrian  $M/G/c$  termasuk yang cukup sulit, didalam modul ini akan diutarakan hasil-hasil penghampiran yang telah didapat didalam sistem antrian  $M/G/c$  ini.

- $$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}$$
- $$p_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} p_0, \quad n = 1, \dots, c-1$$
- $$\Pi = \sum_{k=c}^{\infty} p_k = \frac{\rho}{(1-\rho)} p_{c-1}$$
- $$EN_q = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2(1-\rho)}$$
- $$EN = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda}{\mu}$$
- $$ED = \frac{EN_q}{\lambda} = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2\lambda(1-\rho)}$$
- $$EW = ED + \frac{1}{\mu} = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$$

### **5.3. LATIHAN**

#### **Latihan 5.1**

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar lima puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar sepuluh pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per sepuluh jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,09 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar delapan. Berapa besarnya penghampiran untuk

probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem  $p_0$  ? [Jawab 0,00647]

#### Latihan 5.2

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar lima puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar sepuluh pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per sepuluh jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,09 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar delapan. Berapa penghampiran untuk probabilitas ada  $n$  sama dengan enam pelanggan dalam sistem  $p_6$  ? [Jawab 0,14050]

#### Latihan 5.3

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar lima puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar sepuluh pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per sepuluh jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,09 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar delapan. Berapa penghampiran untuk probabilitas pelanggan mengantri? [Jawab 0,16727]

#### Latihan 5.4

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar lima puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar sepuluh pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per sepuluh jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,09 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar delapan. Berapa besarnya penghampiran untuk ekspektasi jumlah pelanggan antri  $EN_q$  dari sistem antrian ini? [Jawab 1,39389 pelanggan]

#### Latihan 5.5

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar lima puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar sepuluh pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per sepuluh jam,

variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,09 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar delapan. Berapa besarnya penghampiran untuk penghampiran untuk ekspektasi jumlah pelanggan sistem  $EN$  dari sistem antrian ini? [Jawab 6,39389 pelanggan]

#### Latihan 5.6

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar lima puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar sepuluh pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per sepuluh jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,09 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar delapan. Berapa besarnya penghampiran untuk ekspektasi waktu antri  $ED$  dari sistem antrian ini? [Jawab 0,02788 jam]

#### Latihan 5.7

Suatu sistem antrian  $M/G/c$  mempunyai laju datang  $\lambda$  sebesar lima puluh pelanggan per jam, sedangkan laju layan  $\mu$  sebesar sepuluh pelanggan per jam atau  $ES$  sebesar satu per sepuluh jam, variansi waktu layan  $VS$  sebesar  $0,09 \text{ jam}^2$ , dan jumlah pelayan  $c$  sebesar delapan. Berapa besarnya penghampiran untuk ekspektasi waktu sistem  $EW$  dari sistem antrian ini? [Jawab 0,12788 jam]

## 5.4. UMPAN BALIK

- Cocokkan hasil jawaban Anda dari latihan-latihan diatas dengan kunci jawaban, kemudian hitung tingkat penguasaan Anda dengan rumus

Tingkat penguasaan =

$$\frac{\text{Jumlah jawaban latihan yang benar}}{\text{Jumlah latihan}} \times 100\%$$

**Umpan balik**

- Arti besarnya tingkat penguasaan :  
 $90\% \leq \text{Tingkat penguasaan} \leq 100\%$  = Baik sekali  
 $80\% \leq \text{Tingkat penguasaan} < 90\%$  = Baik  
 $70\% \leq \text{Tingkat penguasaan} < 80\%$  = Cukup  
 $0\% \leq \text{Tingkat penguasaan} < 70\%$  = Kurang
- Jika skor yang Anda peroleh sebesar 80% atau lebih maka Anda dapat meneruskan ke modul berikutnya. Apabila skor yang Anda peroleh kurang dari 80% maka bacalah kembali materi modul ini, terutama hal-hal yang belum Anda kuasai!

**5.5. DAFTAR PUSTAKA****Daftar pustaka**

1. Gross, D., Carl M. Harris (1974). *Fundamentals of Queueing Theory*. New York : John Wiley & Sons, Inc.
2. Hokstad, P. (1978). *Operations Research, Vol. 26, No. 3, May-June*.
3. Kleinrock, L. (1975). *Queueing Systems, Volume I : Theory*. New York : John Wiley & Sons, Inc.
4. Wolff, Ronald W. (1989). *Stochastic Modeling and the Theory of Queues*. Englewood Cliffs : Prentice Hall, Inc.