

SISTEM ANTRIAN *M/G/c*

Oleh: Dr. Ir. H. Muhammad Sutarno, S.H.I., M.Sc., M.Ag.

Sistem antrian dengan waktu antardatang berdistribusi eksponensial atau jumlah pelanggan yang datang berdistribusi Poisson, dan waktu layannya berdistribusi umum (*general*) tidak dikhususkan untuk distribusi tertentu, dan jumlah pelayannya sebanyak c . Sistem antrian ini dinotasikan dengan sistem antrian *M/G/c*.

Penghampiran (*approximation*) probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem

Di sistem antrian *M/G/c*, penghampiran (*approximation*) probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem

$$p_0(\lambda, \mu, c) = \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \right] + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}$$

di mana

p_0 probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem.

λ menyatakan laju datang (*arrival rate*) yaitu jumlah pelanggan yang datang rata-rata per satuan waktu.

μ menyatakan laju layan yaitu jumlah pelanggan yang dilayani rata-rata per satuan waktu.

c menyatakan jumlah pelayan paralel.

$$p_0(\lambda, \mu, c) := \begin{cases} c \leftarrow \frac{c}{\text{pelayan}} \\ \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \right] + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}} & \text{if } (c \geq 1) \wedge \left(0 < \frac{\lambda}{c\mu} < 1\right) \\ \text{"Tidak didefinisikan"} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Contoh 1

$$\lambda \equiv 40 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

menyatakan laju datang (*arrival rate*) yaitu jumlah pelanggan yang datang rata-rata per satuan waktu.

$$\mu \equiv 10 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

menyatakan laju layan yaitu jumlah pelanggan yang dilayani rata-rata per satuan waktu.

$$VS \equiv 0.04 \text{jam}^2$$

menyatakan variansi waktu layan pelanggan.

$$VS = ES^2 - (ES)^2$$

ES^2 menyatakan momen kedua waktu layan pelanggan.

ES menyatakan ekspektasi waktu layan pelanggan, singkatnya ekspektasi waktu layan.

Besarnya sama dengan $\frac{1}{\mu}$

$$ES \equiv \frac{1 \text{pelanggan}}{\mu}$$

$$ES = 0.1 \text{ jam}$$

$$\mu = 10 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

$$ES^2 \equiv VS + (ES)^2$$

$$ES^2 = 0.05 \text{ jam}^2$$

$$VS = 0.04 \text{ jam}^2$$

$$(ES)^2 = 0.01 \text{ jam}^2$$

Jumlah pelayan minimum:

$$c_{min}(\lambda, \mu) \equiv \begin{cases} \left(\text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 1 \right) \text{ pelayan} & \text{if } \text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu} \\ \left(\text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right) \text{ pelayan} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$c_{min}(\lambda, \mu) = 5 \text{ pelayan}$$

$$ORIGIN \equiv \frac{c_{min}(\lambda, \mu)}{\text{pelayan}}$$

$$c_{atas}(\lambda, \mu) \equiv 3 c_{min}(\lambda, \mu)$$

sebagai contoh saja

jumlah pelayan.

$$c := c_{\min}(\lambda, \mu), (c_{\min}(\lambda, \mu) + 1 \text{ pelayan}) .. c_{\text{atas}}(\lambda, \mu)$$

$$c_{\min}(\lambda, \mu) = 5 \text{ pelayan} \quad c_{\text{atas}}(\lambda, \mu) = 15 \text{ pelayan}$$

Jumlah pelayan

Penghampiran probabilitas ada nol pelanggan dalam sistem

$$c = \quad p_0(\lambda, \mu, c)$$

5	pelayan	0.013
6		0.017
7		0.018
8		0.018
9		0.018
10		0.018
11		0.018
12		0.018
13		0.018
14		0.018
15		0.018

Penghampiran probabilitas ada *n* pelanggan dalam sistem

$$p_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} p_0$$

$$n = 1, \dots, c - 1$$

$$p(n, \lambda, \mu, c) := \begin{cases} \left(n \leftarrow \frac{n}{\text{pelanggan}}\right) \wedge \left(c \leftarrow \frac{c}{\text{pelayan}}\right) \\ \text{if } (c \geq 1) \wedge (0 \leq n < c) \wedge \left(0 < \frac{\lambda}{c \mu} < 1\right) \\ \left. \begin{aligned} p_0 \leftarrow \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}\right] + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c \mu}\right)}} \\ \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} p_0 \end{aligned} \right\} \\ \text{"Tidak didefinisikan" otherwise} \end{cases}$$

Contoh 2

$$\lambda = 40 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

menyatakan laju datang (*arrival rate*) yaitu jumlah pelanggan yang datang rata-rata per satuan waktu.

$$\mu = 10 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

menyatakan laju layan yaitu jumlah pelanggan yang dilayani rata-rata per satuan waktu.

Jumlah pelayan minimum:

$$c_{min}(\lambda, \mu) \equiv \begin{cases} \left(\text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 1 \right) \text{ pelayan} & \text{if } \text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu} \\ \left(\text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right) \text{ pelayan} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$c_{min}(\lambda, \mu) = 5 \text{ pelayan}$$

$$ORIGIN \equiv \frac{c_{min}(\lambda, \mu)}{\text{pelayan}}$$

$$c_{atas}(\lambda, \mu) \equiv 3 c_{min}(\lambda, \mu) \quad \text{sebagai contoh saja}$$

$$c := c_{min}(\lambda, \mu), (c_{min}(\lambda, \mu) + 1 \text{ pelayan}) .. c_{atas}(\lambda, \mu) \quad \text{jumlah pelayan.}$$

$$c_{min}(\lambda, \mu) = 5 \text{ pelayan} \quad c_{atas}(\lambda, \mu) = 15 \text{ pelayan}$$

$$c := 7 \text{ pelayan}$$

$$n := 0 \text{ pelanggan}, 1 \text{ pelanggan} .. \left(\frac{c}{\text{pelayan}} - 1 \right) \text{ pelanggan}$$

Untuk $c = 7 \text{ pelayan}$

Penghampiran probabilitas ada n pelanggan dalam sistem

$$p(n, \lambda, \mu, c) = \begin{pmatrix} 0.018 \\ 0.071 \\ 0.142 \\ 0.19 \\ 0.19 \\ 0.152 \\ 0.101 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} n = \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \\ \boxed{4} \\ \boxed{5} \\ \boxed{6} \end{matrix} \text{ pelanggan}$$

Penghampiran probabilitas pelanggan antri

$$\Pi = \sum_{k=c}^{\infty} p_k = \frac{\frac{\lambda}{c \mu}}{1 - \frac{\lambda}{c \mu}} p_{c-1}$$

di mana

p_k probabilitas ada k pelanggan dalam sistem.

λ menyatakan laju datang (*arrival rate*) yaitu jumlah pelanggan yang datang rata-rata per satuan waktu.

μ menyatakan laju layan yaitu jumlah pelanggan yang dilayani rata-rata per satuan waktu.

c menyatakan jumlah pelayan paralel.

p_{c-1} probabilitas ada $c-1$ pelanggan dalam sistem.

Contoh 3

$$\lambda = 40 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

menyatakan laju datang (*arrival rate*) yaitu jumlah pelanggan yang datang rata-rata per satuan waktu.

$$\mu = 10 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

menyatakan laju layan yaitu jumlah pelanggan yang dilayani rata-rata per satuan waktu.

Jumlah pelayan minimum:

$$c_{min}(\lambda, \mu) \equiv \begin{cases} \left(\text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 1 \right) \text{ pelayan} & \text{if } \text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu} \\ \left(\text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right) \text{ pelayan} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$c_{min}(\lambda, \mu) = 5 \text{ pelayan}$$

$$ORIGIN \equiv \frac{c_{min}(\lambda, \mu)}{\text{pelayan}}$$

$$c_{atas}(\lambda, \mu) \equiv 3 c_{min}(\lambda, \mu) \quad \text{sebagai contoh saja}$$

$$c := c_{min}(\lambda, \mu), (c_{min}(\lambda, \mu) + 1 \text{ pelayan}) .. c_{atas}(\lambda, \mu) \quad \text{jumlah pelayan.}$$

$$c_{min}(\lambda, \mu) = 5 \text{ pelayan} \quad c_{atas}(\lambda, \mu) = 15 \text{ pelayan}$$

II Penghampiran probabilitas pelanggan antri

$$\Pi(\lambda, \mu, c) := \begin{cases} c \leftarrow \frac{c}{\text{pelayan}} \\ \text{if } (c \geq 1) \wedge \left(0 < \frac{\lambda}{c \mu} < 1\right) \\ \left. \begin{aligned} p_0 &\leftarrow \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \right] + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c \mu}\right)}} \\ \text{PiBesar} &\leftarrow \frac{\frac{\lambda}{c \mu}}{1 - \frac{\lambda}{c \mu}} \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{(c-1)!} p_0 \right] \end{aligned} \right\} \\ \text{"Tidak didefinisikan" otherwise} \end{cases}$$

Jumlah pelayan

Penghampiran probabilitas pelanggan antri

c =

5	pelayan
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

$\Pi(\lambda, \mu, c) =$

0.554
0.285
0.135
0.059
0.024
$8.815 \cdot 10^{-3}$
$3.024 \cdot 10^{-3}$
$9.622 \cdot 10^{-4}$
$2.851 \cdot 10^{-4}$
$7.896 \cdot 10^{-5}$
$2.051 \cdot 10^{-5}$

Penghampiran ekspektasi jumlah pelanggan antri

$$EN_q = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2(1-\rho)} = \frac{\frac{\lambda}{c\mu} \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2\left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)} = \frac{\frac{\lambda}{c\mu} \left[VS + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 \left(\frac{\frac{\lambda}{c\mu}}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}} P_{c-1} \right) \right]}{2\left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}$$

di mana

EN_q menyatakan ekspektasi jumlah pelanggan antri.

ES menyatakan ekspektasi waktu layan pelanggan, singkatnya ekspektasi waktu layan.

Besarnya sama dengan $\frac{1}{\mu}$

ES^2 menyatakan momen kedua waktu layan pelanggan.

Π menyatakan penghampiran (*approximation*) probabilitas pelanggan antri.

ρ menyatakan faktor utilisasi atau intensitas lalu lintas.

Besarnya sama dengan $\frac{\lambda}{c\mu}$

$$\begin{aligned}
 EN_q(\lambda, \mu, c, VS) &:= c \leftarrow \frac{c}{\text{pelayan}} \\
 ES &\leftarrow \frac{1 \text{pelanggan}}{\mu} \\
 ES^2 &\leftarrow VS + (ES)^2 \\
 \text{if } (c \geq 1) \wedge \left(0 < \frac{\lambda}{c \mu} < 1\right) \\
 &\left| \begin{aligned}
 p_0 &\leftarrow \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \right] + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c \mu}\right)}} \\
 PiBesar &\leftarrow \frac{\frac{\lambda}{c \mu}}{1 - \frac{\lambda}{c \mu}} \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{(c-1)!} p_0 \right] \\
 ENq &\leftarrow \frac{\frac{\lambda}{c \mu} \frac{ES^2}{(ES)^2} PiBesar}{2 \left(1 - \frac{\lambda}{c \mu}\right)} \\
 ENq &\text{ pelanggan} \\
 \text{"Tidak didefinisikan" } &\text{otherwise}
 \end{aligned}
 \right.
 \end{aligned}$$

Contoh 4

$$\lambda = 40 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

menyatakan laju datang (*arrival rate*) yaitu jumlah pelanggan yang datang rata-rata per satuan waktu.

$$\mu = 10 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

menyatakan laju layan yaitu jumlah pelanggan yang dilayani rata-rata per satuan waktu.

Jumlah pelayan minimum:

$$c_{min}(\lambda, \mu) \equiv \begin{cases} \left(\text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 1 \right) \text{ pelayan} & \text{if } \text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu} \\ \left(\text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right) \text{ pelayan} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$c_{min}(\lambda, \mu) = 5 \text{ pelayan}$$

$$ORIGIN \equiv \frac{c_{min}(\lambda, \mu)}{pelayan}$$

$$c_{atas}(\lambda, \mu) \equiv 3 c_{min}(\lambda, \mu) \quad \text{sebagai contoh saja}$$

$$c := c_{min}(\lambda, \mu), (c_{min}(\lambda, \mu) + 1 \text{ pelayan}) .. c_{atas}(\lambda, \mu) \quad \text{jumlah pelayan.}$$

$$c_{min}(\lambda, \mu) = 5 \text{ pelayan} \quad c_{atas}(\lambda, \mu) = 15 \text{ pelayan}$$

Jumlah pelayan Penghampiran ekspektasi jumlah pelanggan antri

$c =$		$EN_q(\lambda, \mu, c, VS) =$
5	pelayan	5.541 pelanggan
6		1.424
7		0.45
8		0.148
9		0.048
10		0.015
11		$4.32 \cdot 10^{-3}$
12		$1.203 \cdot 10^{-3}$
13		$3.168 \cdot 10^{-4}$
14		$7.896 \cdot 10^{-5}$
15		$1.864 \cdot 10^{-5}$

Penghampiran ekspektasi waktu antri

$$ED = \frac{EN_q}{\lambda}$$

$$EN_q = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2(1-\rho)} = \frac{\frac{\lambda}{c \mu} \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2 \left(1 - \frac{\lambda}{c \mu}\right)} = \frac{\frac{\lambda}{c \mu} \frac{VS + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2}{\left(\frac{1}{\mu}\right)^2} \left(\frac{\frac{\lambda}{c \mu}}{1 - \frac{\lambda}{c \mu}} P_{c-1}\right)}{2 \left(1 - \frac{\lambda}{c \mu}\right)}$$

di mana

EN_q menyatakan ekspektasi jumlah pelanggan antri.

ES menyatakan ekspektasi waktu layan pelanggan, singkatnya ekspektasi waktu layan.

Besarnya sama dengan $\frac{1}{\mu}$

*ES*² menyatakan momen kedua waktu layan pelanggan.

Π menyatakan penghampiran (*approximation*) probabilitas pelanggan antri.

ρ menyatakan faktor utilisasi atau intensitas lalu lintas.

Besarnya sama dengan $\frac{\lambda}{c \mu}$

$ED(\lambda, \mu, c, VS) :=$	$c \leftarrow \frac{c}{\text{pelayan}}$ $ES \leftarrow \frac{1 \text{pelanggan}}{\mu}$ $ES^2 \leftarrow VS + (ES)^2$ <p>if $(c \geq 1) \wedge \left(0 < \frac{\lambda}{c \mu} < 1\right)$</p> $p_0 \leftarrow \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \right] + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c \mu}\right)}}$ $Pi\text{Besar} \leftarrow \frac{\frac{\lambda}{c \mu}}{1 - \frac{\lambda}{c \mu}} \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{(c-1)!} p_0 \right]$ $ENq \leftarrow \frac{\frac{\lambda}{c \mu} \frac{ES^2}{(ES)^2} Pi\text{Besar}}{2 \left(1 - \frac{\lambda}{c \mu}\right)}$ $\frac{ENq \text{ pelanggan}}{\lambda}$
	"Tidak didefinisikan" otherwise

Contoh 5

$$\lambda = 40 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

menyatakan laju datang (*arrival rate*) yaitu jumlah pelanggan yang datang rata-rata per satuan waktu.

$$\mu = 10 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

menyatakan laju layan yaitu jumlah pelanggan yang dilayani rata-rata per satuan waktu.

Jumlah pelayan minimum:

$$c_{min}(\lambda, \mu) \equiv \begin{cases} \left(\text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 1 \right) \text{ pelayan} & \text{if } \text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu} \\ \left(\text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right) \text{ pelayan} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$c_{min}(\lambda, \mu) = 5 \text{ pelayan}$$

$$ORIGIN \equiv \frac{c_{min}(\lambda, \mu)}{\text{pelayan}}$$

$$c_{atas}(\lambda, \mu) \equiv 3 c_{min}(\lambda, \mu) \quad \text{sebagai contoh saja}$$

$$c := c_{min}(\lambda, \mu), (c_{min}(\lambda, \mu) + 1 \text{ pelayan}) .. c_{atas}(\lambda, \mu) \quad \text{jumlah pelayan.}$$

$$c_{min}(\lambda, \mu) = 5 \text{ pelayan} \quad c_{atas}(\lambda, \mu) = 15 \text{ pelayan}$$

Jumlah pelayan

Penghampiran ekspektasi waktu antri

$c =$

5	pelayan
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

$ED(\lambda, \mu, c, VS) =$

0.139	jam
0.036	
0.011	
$3.69 \cdot 10^{-3}$	
$1.188 \cdot 10^{-3}$	
$3.673 \cdot 10^{-4}$	
$1.08 \cdot 10^{-4}$	
$3.007 \cdot 10^{-5}$	
$7.92 \cdot 10^{-6}$	
$1.974 \cdot 10^{-6}$	
$4.661 \cdot 10^{-7}$	

Penghampiran ekspektasi waktu sistem

Penghampiran ekspektasi waktu sistem yaitu penghampiran waktu rata-rata pelanggan berada dalam sistem

$$EW = ED + \frac{1}{\mu} = \frac{EN_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

$$EN_q = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2(1-\rho)} = \frac{\frac{\lambda}{c\mu} \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2\left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)} = \frac{\frac{\lambda}{c\mu} \frac{VS + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2}{\left(\frac{1}{\mu}\right)^2} \left(\frac{\frac{\lambda}{c\mu}}{1 - \frac{\lambda}{c\mu}} P_{c-1}\right)}{2\left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}$$

di mana

ED menyatakan ekspektasi waktu antri.

EN_q menyatakan ekspektasi jumlah pelanggan antri.

ES menyatakan ekspektasi waktu layan pelanggan, singkatnya ekspektasi waktu layan.

Besarnya sama dengan $\frac{1}{\mu}$

ES^2 menyatakan momen kedua waktu layan pelanggan.

Π menyatakan penghampiran (*approximation*) probabilitas pelanggan antri.

ρ menyatakan faktor utilisasi atau intensitas lalu lintas.

Besarnya sama dengan $\frac{\lambda}{c\mu}$

$$EW(\lambda, \mu, c, VS) := \begin{cases} c \leftarrow \frac{c}{\text{pelayan}} \\ ES \leftarrow \frac{1\text{pelanggan}}{\mu} \\ ES^2 \leftarrow VS + (ES)^2 \\ \text{if } (c \geq 1) \wedge \left(0 < \frac{\lambda}{c \mu} < 1\right) \\ \left. \begin{aligned} p_0 &\leftarrow \frac{1}{\left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \right] + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c \mu}\right)}} \\ Pi\text{Besar} &\leftarrow \frac{\frac{\lambda}{c \mu}}{1 - \frac{\lambda}{c \mu}} \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{(c-1)!} p_0 \right] \\ ENq &\leftarrow \frac{\frac{\lambda}{c \mu} \frac{ES^2}{(ES)^2} Pi\text{Besar}}{2 \left(1 - \frac{\lambda}{c \mu}\right)} \\ \frac{ENq \text{ pelanggan}}{\lambda} &+ \frac{1\text{pelanggan}}{\mu} \end{aligned} \right. \\ \text{"Tidak didefinisikan" otherwise} \end{cases}$$

Contoh 6

$$\lambda = 40 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

menyatakan laju datang (*arrival rate*) yaitu jumlah pelanggan yang datang rata-rata per satuan waktu.

$$\mu = 10 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

menyatakan laju layan yaitu jumlah pelanggan yang dilayani rata-rata per satuan waktu.

Jumlah pelayan minimum:

$$c_{min}(\lambda, \mu) \equiv \begin{cases} \left(\text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 1 \right) \text{ pelayan} & \text{if } \text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu} \\ \left(\text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right) \text{ pelayan} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$c_{min}(\lambda, \mu) = 5 \text{ pelayan}$$

$$ORIGIN \equiv \frac{c_{min}(\lambda, \mu)}{pelayan}$$

$$c_{atas}(\lambda, \mu) \equiv 3 c_{min}(\lambda, \mu) \quad \text{sebagai contoh saja}$$

$$c := c_{min}(\lambda, \mu), (c_{min}(\lambda, \mu) + 1 \text{ pelayan}) .. c_{atas}(\lambda, \mu) \quad \text{jumlah pelayan.}$$

$$c_{min}(\lambda, \mu) = 5 \text{ pelayan} \quad c_{atas}(\lambda, \mu) = 15 \text{ pelayan}$$

Jumlah pelayan

Penghampiran ekspektasi waktu sistem

$$c = \quad EW(\lambda, \mu, c, VS)$$

<i>c</i>	<i>pelayan</i>	<i>EW</i> (jam)
5		0.239
6		0.136
7		0.111
8		0.104
9		0.101
10		0.1
11		0.1
12		0.1
13		0.1
14		0.1
15		0.1

Penghampiran ekspektasi pelanggan sistem

$$EN = \lambda EW = \lambda \left(ED + \frac{1}{\mu} \right) = EN_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$EN_q = \frac{\rho \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2(1-\rho)} = \frac{\frac{\lambda}{c \mu} \frac{ES^2}{(ES)^2} \Pi}{2 \left(1 - \frac{\lambda}{c \mu} \right)} = \frac{\frac{\lambda}{c \mu} \frac{VS + \left(\frac{1}{\mu} \right)^2 \left(\frac{\frac{\lambda}{c \mu}}{1 - \frac{\lambda}{c \mu}} P_{c-1} \right)}{\left(\frac{1}{\mu} \right)^2}}{2 \left(1 - \frac{\lambda}{c \mu} \right)}$$

di mana

EW menyatakan ekspektasi waktu sistem.

ED menyatakan ekspektasi waktu antri.

EN_q menyatakan ekspektasi jumlah pelanggan antri.

ES menyatakan ekspektasi waktu layan pelanggan, singkatnya ekspektasi waktu layan.

Besarnya sama dengan $\frac{1}{\mu}$

ES^2 menyatakan momen kedua waktu layan pelanggan.

Π menyatakan penghampiran (*approximation*) probabilitas pelanggan antri.

ρ menyatakan faktor utilisasi atau intensitas lalu lintas.

Besarnya sama dengan $\frac{\lambda}{c \mu}$

$$\begin{aligned}
 EN(\lambda, \mu, c, VS) := & \quad c \leftarrow \frac{c}{\text{pelayan}} \\
 & \quad ES \leftarrow \frac{1 \text{pelanggan}}{\mu} \\
 & \quad ES^2 \leftarrow VS + (ES)^2 \\
 & \quad \text{if } (c \geq 1) \wedge \left(0 < \frac{\lambda}{c \mu} < 1\right) \\
 & \quad \quad \left[\begin{aligned}
 p_0 & \leftarrow \frac{1}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c \mu}\right)}} \\
 Pi\text{Besar} & \leftarrow \frac{\frac{\lambda}{c \mu}}{1 - \frac{\lambda}{c \mu}} \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c-1}}{(c-1)!} p_0 \right] \\
 EN_q & \leftarrow \frac{\frac{\lambda}{c \mu} \frac{ES^2}{(ES)^2} Pi\text{Besar}}{2 \left(1 - \frac{\lambda}{c \mu}\right)} \\
 \lambda & \left(\frac{EN_q \text{pelanggan}}{\lambda} + \frac{1 \text{pelanggan}}{\mu} \right)
 \end{aligned} \right. \\
 & \quad \text{"Tidak didefinisikan" otherwise}
 \end{aligned}$$

Contoh 7

$$\lambda = 40 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

menyatakan laju datang (*arrival rate*) yaitu jumlah pelanggan yang datang rata-rata per satuan waktu.

$$\mu = 10 \frac{\text{pelanggan}}{\text{jam}}$$

menyatakan laju layan yaitu jumlah pelanggan yang dilayani rata-rata per satuan waktu.

Jumlah pelayan minimum:

$$c_{min}(\lambda, \mu) \equiv \begin{cases} \left(\text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + 1 \right) \text{ pelayan} & \text{if } \text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu} \\ \left(\text{ceil}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \right) \text{ pelayan} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$c_{min}(\lambda, \mu) = 5 \text{ pelayan}$$

$$ORIGIN \equiv \frac{c_{min}(\lambda, \mu)}{\text{pelayan}}$$

$$c_{atas}(\lambda, \mu) \equiv 3 c_{min}(\lambda, \mu) \quad \text{sebagai contoh saja}$$

$$c := c_{min}(\lambda, \mu), (c_{min}(\lambda, \mu) + 1 \text{ pelayan}) .. c_{atas}(\lambda, \mu) \quad \text{jumlah pelayan.}$$

$$c_{min}(\lambda, \mu) = 5 \text{ pelayan} \quad c_{atas}(\lambda, \mu) = 15 \text{ pelayan}$$

Jumlah pelayan

Penghampiran ekspektasi pelanggan sistem

$c =$

5	pelayan
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

$EN(\lambda, \mu, c, VS) =$

9.541	pelanggan
5.424	
4.45	
4.148	
4.048	
4.015	
4.004	
4.001	
4	
4	
4	