PROBABILITAS DAN STATISTIKA

VARIABEL ACAK

Dr. Ir. H. K. P. Muhammad Sutarno, S.H.I., M.Sc., M.Ag.
Dosen Program Studi Teknik Industri Tahun 1976-2012
Institut Teknologi Bandung

Di bab ini akan dibahas pengertian variabel acak dan pembagian variabel acak.

3.1. PENGERTIAN VARIABEL ACAK

Definisi 3.1. Variabel Acak

Variabel acak X adalah fungsi bernilai angka riil dari hasil-hasil suatu eksperimen acak.

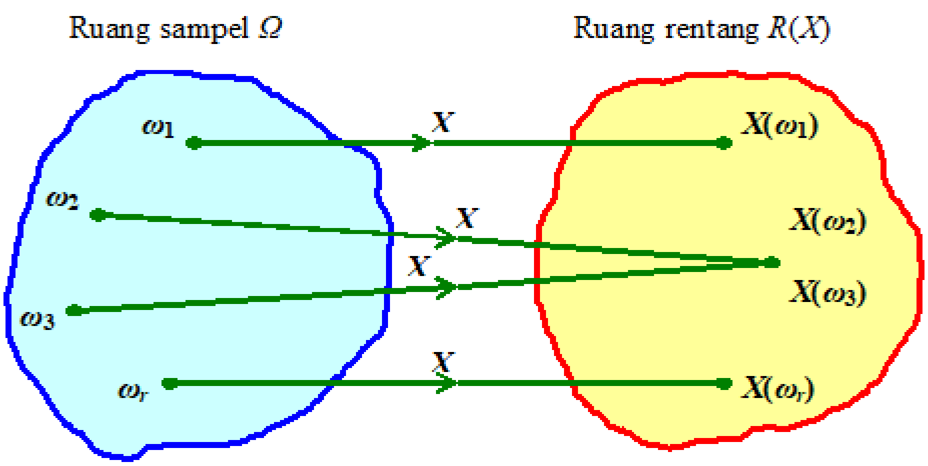
Variabel acak atau disebut ubah acak atau disebut juga variabel stokastik.

Variabel acak mempunyai beberapa ciri yaitu:

1. Berasal dari eksperimen acak, artinya berasal dari eksperimen di mana hasil-hasil eksperimen berubah-ubah. Perubahan hasil-hasil ini merupakan sifat dasar yang penting.

2. Untuk hasil percobaan $\omega \in \Omega$, di mana Ω adalah ruang sampel maka $X(\omega)$ bernilai angka riil.

3. Bila $\omega_i \in \Omega$ dipetakan dengan fungsi X sehingga menjadi $X\left(\omega_i\right)$ maka dapat digambarkan hubungannya sebagai berikut:



Gambar 1. $\omega_i \in \Omega$ dipetakan dengan fungsi X menjadi $X\left(\omega_i\right)$

$X(\omega_1), X(\omega_2), \ldots$ membentuk ruang yang disebut ruang rentang *X* yang terdiri dari semua nilai-nilai $X(\omega_r)$, r = 1, 2, ...

Ruang rentang *X* ditulis sebagai $R(X)$ atau R_X .

4. Untuk satu titik sampel $\omega_r \in \Omega$ hanya ada satu nilai $X(\omega_r)$.

5. Variabel acak *X* merupakan fungsi satu titik sampel dari ruang sampel Ω artinya kita bisa menyatakan untuk $\omega_r \in \Omega$, r = 1, 2, ... , $X(\omega_1), X(\omega_2), \ldots$.
Tetapi tidak bisa kita menyatakan $X(\omega_1 + \omega_2)$.

Hal ini berbeda dengan probabilitas *P* yang merupakan fungsi satu atau lebih titik sampel dari ruang sampel , artinya untuk $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$ bisa kita nyatakan

$$P(\omega_1) \quad , \qquad P(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)$$

6. Mempunyai beberapa sifat:

Jika *X* dan *Y* variabel-variabel acak dan *K* adalah konstanta maka:

(1) *KX* merupakan variabel acak.

(2) *X*+*Y* merupakan variabel acak.

(3) *X*-*Y* merupakan variabel acak.

(4) min(*X*,*Y*) merupakan variabel acak.

(5) maks(*X*,*Y*) merupakan variabel acak.

Contoh 3.1

Suatu eksperimen acak yang berkaitan dengan banyaknya barang baik dari hasil pemeriksaan berurutan dua barang sembarang dari hasil suatu prroduksi tertentu. Bila titik sampel "BR" menyatakan peristiwa barang pertama setelah diperiksa ternyata baik dan barang kedua setelah diperiksa ternyata rusak, maka ruang sampel eksperimen tersebut adalah:

$$\Omega := \begin{pmatrix} \text{"RR"} \\ \text{"RB"} \\ \text{"BR"} \\ \text{"BB"} \end{pmatrix} \qquad \omega := \Omega$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \text{"RR"} \\ \text{"RB"} \\ \text{"BR"} \\ \text{"BB"} \end{pmatrix} \qquad \omega = \begin{pmatrix} \text{"RR"} \\ \text{"RB"} \\ \text{"BR"} \\ \text{"BB"} \end{pmatrix}$$

Bila untuk titik sampel "RR" diberi nilai angka riil 0, untuk titik sampel "RB" diberi nilai angka riil 1, untuk titik sampel "BR" diberi angka riil 1, dan untuk titik sampel "BB" diberi nilai angka riil 2, maka dapat dituliskan sebagai variabel acak *X* sebagai berikut:

$$r := 1 .. rows(\omega)$$

$$X(hasil) := \left| \begin{array}{l} 0 \;\; if \;\; hasil = \text{"RR"} \\ 1 \;\; if \;\; hasil = \text{"RB"} \\ 1 \;\; if \;\; hasil = \text{"BR"} \\ 2 \;\; if \;\; hasil = \text{"BB"} \end{array} \right.$$

$$X(\text{"RR"}) = 0$$
$$X(\text{"RB"}) = 1$$
$$X(\text{"BR"}) = 1$$
$$X(\text{"BB"}) = 2$$

Untuk

$$\omega_r = \begin{pmatrix} \text{"RR"} \\ \text{"RB"} \\ \text{"BR"} \\ \text{"BB"} \end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad X(\omega_r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X_r := X(\omega_r)$$
$$X := X$$

$R(X) := Set(X)$ Ruang rentang *X*

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad R(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Tampak bahwa $X(\omega_r)$ bernilai angka riil, dan ruang rentangnya adalah

$$X(\omega_r) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad R(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Untuk satu titik sampel ω_r di mana $\omega_r \in \Omega$ maka hanya ada satu nilai riil $X\left(\omega_r\right)$

$$\omega_r = \begin{pmatrix} \text{"RR"} \\ \text{"RB"} \\ \text{"BR"} \\ \text{"BB"} \end{pmatrix} \qquad X\left(\omega_r\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} \text{"RR"} \\ \text{"RB"} \\ \text{"BR"} \\ \text{"BB"} \end{pmatrix}$$

Misalnya titik sampel "RR" maka hanya ada satu nilai riil $X(\text{"RR"}) = 0$ yang besarnya dalam hal ini sebesar nol.

Tetapi bisa saja untuk satu nilai riil $X\left(\omega_r\right) = x$ di mana $\omega_r \in \Omega$
terdapat lebih dari satu titik sampel ω_r yang memenuhi syarat $X\left(\omega_r\right) = x$
Misalnya untuk

$X(\text{"RB"}) = 1$ dan
$X(\text{"BR"}) = 1$

ada dua titik sampel yakni "RB" dan "BR" yang mempunyai nilai $x = 1$.

Kita tidak bisa menyatakan *X*("BB"+"RR"), karena variabel acak *X* menyatakan fungsi dari satu dan hanya satu titik sampel.

Tetapi bisa dinyatakan berkaitan dengan probabilitas *P*("BB"+"RR") yang besarnya sama dengan *P*("BB") + *P*("RR"), dan bisa juga kita nyatakan

$$P\left(X\left(\omega_r\right) \le 1\right)$$

sebagai probabilitas variabel acak yang bernilai lebih kecil atau sama dengan satu atau secara singkat dinyatakan sebagai

$$P(X \le 1)$$

di mana

$$P(X \le 1) = P[\omega \mid (X(\omega) \le 1)]$$

atau

$$P(X \le 1) = P(X(\text{"RR"})) + P(X(\text{"RB"})) + P(X(\text{"BR"}))$$

$$i := 1 .. rows(R(X)) \qquad rows(R(X)) = 3$$

$$R(X)_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \omega = \begin{pmatrix} \text{"RR"} \\ \text{"RB"} \\ \text{"BR"} \\ \text{"BB"} \end{pmatrix}$$

3.2. JENIS-JENIS VARIABEL ACAK

Ada dua jenis variabel acak yakni:

1. Variabel acak diskrit
2. Variabel acak kontinu

3.2.1. VARIABEL ACAK DISKRIT

Definisi 3.2. Variabel Acak Diskrit

Variabel acak diskrit *X* adalah variabel acak di mana banyaknya semua $X(\omega_r)$ di mana $\omega_r \in \Omega$ yang membentuk ruang rentang $R(X)$ terbatas atau banyak tetapi dapat dihitung.

Jika ruang sampel Ω diskrit maka jelas ruang rentang $R(X)$ diskrit sehingga variabel acaknya juga diskrit.

Bila ruang sampel Ω kontinu bisa saja ruang rentang $R(X)$ diskrit. Jadi dari ruang sampel Ω yang kontinu bisa saja variabel acaknya diskrit.

Contoh 3.2

Suatu percobaan acak untuk mengetahui berat per zak semen tertentu. Kita tertarik hanya pada dua keadaan yaitu:
Pertama, untuk hasil dimana berat bersih per zak semen kurang dari 40 kg, variabel acak hasil ini diberi angka riil nol.
Kedua, untuk hasil di mana berat bersih per zak semen lebih besar atau sama dengan 40 kg, variabel acak hasil ini diberi angka riil satu.

Jadi dapat ditulis variabel acaknya sebagai berikut:

$$X(\omega) := \left| \begin{array}{l} 0 \quad \mathit{if} \quad \omega < 40 \\ 1 \quad \mathit{otherwise} \end{array} \right.$$

Definisi 3.3. Probabilitas Variabel Acak Diskrit

Jika *X* adalah variabel acak maka probabilitas dari $X = x_i$, ditulis $P(X = x_i)$ didefinisikan sebagai

$$P(X = x_i) = P[\omega \mid (X(\omega) = x_i)]$$

$$P(X = x_i) = p_X(x_i)$$

$$P(X = x_i) = p(x_i)$$

$$P(X = x_i) = p_i$$

Fungsi *p* ini disebut fungsi probabilitas atau fungsi massa probabilitas (FMP) atau fungsi padat probabilitas (FPP) atau distribusi probabilitas atau juga disebut distribusi dari variabel acak diskrit *X*.

Fungsi massa probabilitas *p* mempunyai sifat-sifat:

1. $0 \le p(x_i) \le 1$, untuk $x_1, x_2, \ldots, x_n$
2. $p(x) = 0$, untuk x selain $x_1, x_2, \ldots, x_n$
3. $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$.

Di tulisan ini, untuk fungsi *p* akan dipakai istilah fungsi probabilitas atau fungsi massa probabilitas (FMP).

Contoh 3.3

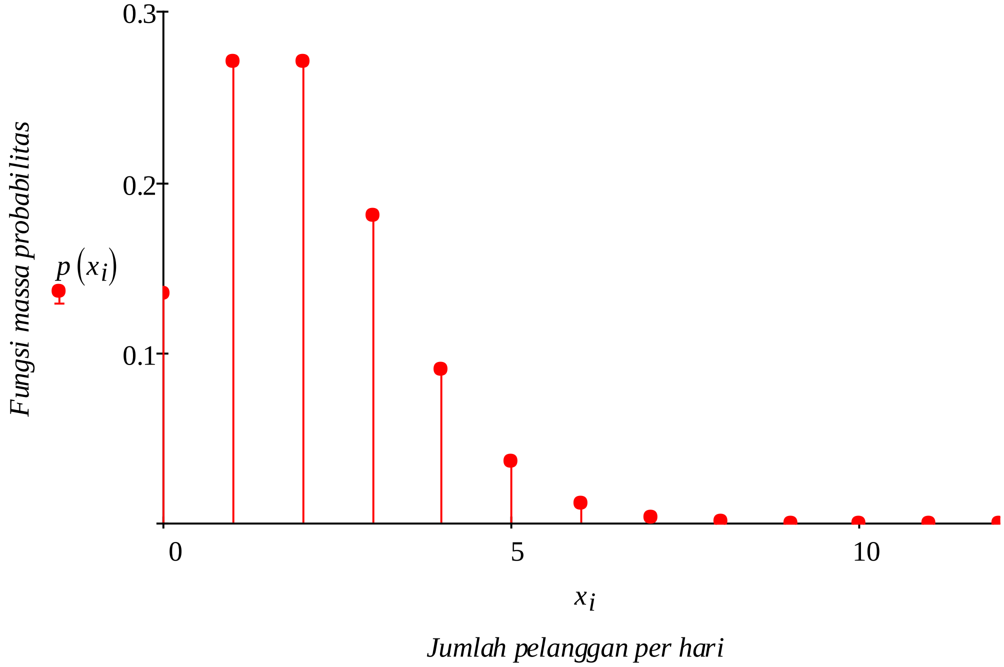
Suatu perusahaan mengetahui bahwa probabilitas jumlah pelanggan yang datang per hari mempunyai bentuk:

$$p(x) := \begin{cases} \dfrac{2^x e^{-2}}{x!} & \text{if } x \ge 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

di mana *x* menyatakan jumlah pelanggan per hari.

$i := 1..\infty$ $\quad$ $x_i := i - 1$

$i =$	$x_i =$	$p(x_i) =$
1	0	0.135
2	1	0.271
3	2	0.271
4	3	0.18
5	4	0.09
6	5	0.036
7	6	0.012
8	7	$3.437 \cdot 10^{-3}$
9	8	$8.593 \cdot 10^{-4}$
10	9	$1.909 \cdot 10^{-4}$
11	10	$3.819 \cdot 10^{-5}$
12	11	$6.944 \cdot 10^{-6}$
13	12	$1.157 \cdot 10^{-6}$
...	...	...



Gambar Fungsi massa probabilitas jumlah pelanggan per hari

$\frac{2^x e^{-2}}{x!}$ menyatakan fungsi massa probabilitas dari jumlah pelanggan per hari sebab:

1. untuk semua $x_i \geq 0$, maka $0 \leq p(x_i) < 1$
2. untuk $x_i < 0$, maka $p(x_i) = 0$
3. $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.

3.2.2. VARIABEL ACAK KONTINU

Definisi 3.4. Variabel Acak Kontinu

Variabel acak kontinu X adalah variabel acak yang mempunyai fungsi $f(x)$ di mana:

1. $f(x) \geq 0$, untuk semua x
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
3. $P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ dengan $-\infty < a < b < \infty$

Fungsi $f(x)$ disebut fungsi padat probabilitas (FPP) variabel acak kontinu.

Contoh 3.4

Suatu perusahaan menerima kiriman bahan baku bagi proses produksinya dengan selang waktu pengiriman bahan baku berdistribusi:

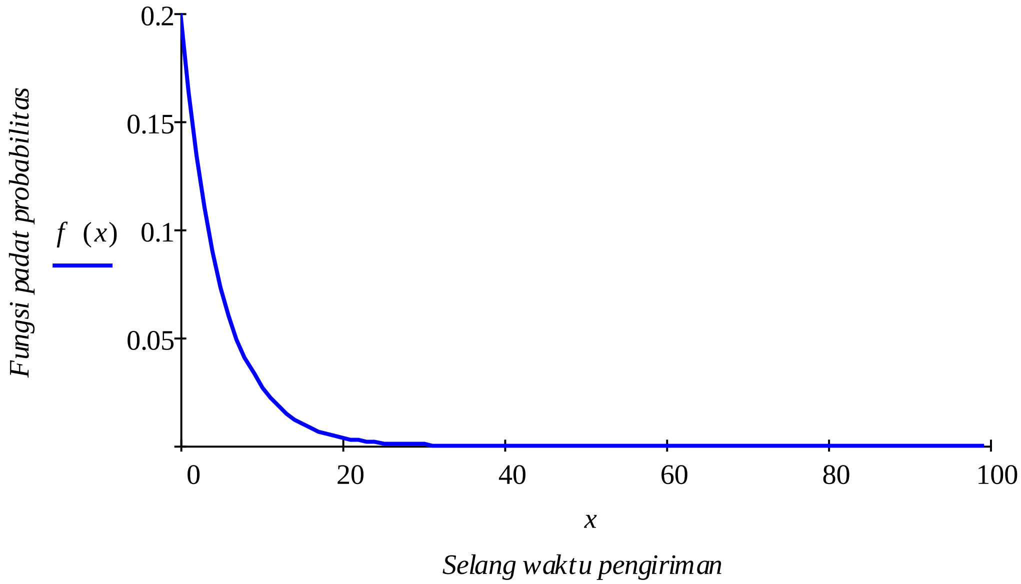
$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} & \text{if } 0 < x < \infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

di mana x menyatakan nilai variabel selang waktu pengiriman bahan baku.

Fungsi $f(x) = \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x}$

merupakan fungsi padat probabilitas dari selang waktu pengiriman baku sebab:

1. $f(x) = \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x} \geq 0 \quad , \quad 0 < x < \infty$
2. $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x}\,dx = 1$



Gambar Fungsi padat probabilitas selang waktu pengiriman