

## PROBABILITAS DAN STATISTIKA

### DISTRIBUSI BERNOULLI

**Dr. Ir. H. K. P. Muhammad Sutarno, S.H.I., M.Sc., M.Ag.**  
**Dosen Program Studi Teknik Industri Tahun 1976-2012**  
**Institut Teknologi Bandung**

**Percobaan yang hanya menghasilkan dua hasil yang mungkin disebut percobaan Bernoulli.**

**Contoh-contoh percobaan semacam ini:**

1. Baik atau jelek kualitas suatu produk.
2. Berhasil atau gagal suatu proyek.
3. Hujan atau takhujan suatu hari.
4. Produktif atau takproduktif suatu perusahaan.
5. Manjur atau takmanjur suatu obat.

Yang diperhatikan di percobaan Bernoulli hanyalah takterjadi peristiwa / gagal atau terjadi suatu peristiwa / berhasil, katakanlah gagal "G" atau berhasil "H". Jadi ruang sampelnya

$$\Omega = \begin{pmatrix} \text{"G"} \\ \text{"H"} \end{pmatrix}$$

Variabel acak dari percobaan ini, biasanya dinyatakan sebagai:

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{if } \omega = \text{"G"} \\ 1 & \text{if } \omega = \text{"H"} \end{cases}$$

Kalau variabel acak  $Y$  dari percobaan semacam ini tidak bernilai nol atau satu, katakanlah  $Y = y_1$  dan  $Y = y_2$ ,

maka variabel acak  $Y$  tersebut dapat diubah menjadi variabel acak  $X$  di mana

$$X = \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1}$$

tampak



untuk  $Y = y_1$ ,



untuk  $Y = y_2$ .

Kembali ke variabel acak  $X$ , bila  $P(X = 0) = 1 - p = q$ .

## 6.1. FUNGSI MASSA PROBABILITAS DISTRIBUSI BERNOULLI

### Definisi 6.1. Distribusi Bernoulli

Variabel acak  $X$  berdistribusi Bernoulli bila variabel acak  $X$  mempunyai fungsi massa probabilitas

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}$$

di mana  $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Fungsi massa probabilitas distribusi Bernoulli ini dapat digambarkan sebagai berikut:

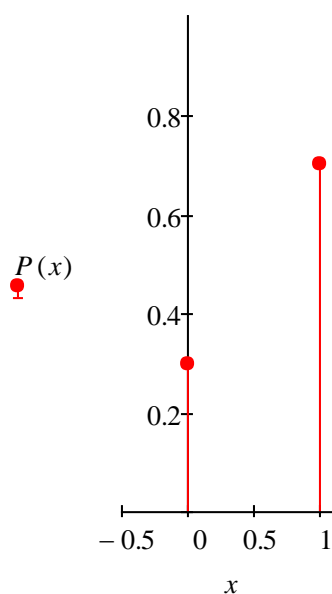
$$x := 0..1$$

$$p := 0.7$$

$$q := 1 - p$$

$$q = 0.3$$

$$P(x) := \begin{cases} 1 - p & \text{if } x = 0 \\ p & \text{if } x = 1 \end{cases}$$



## 6.2. MEAN DAN VARIANSI DISTRIBUSI BERNOULLI

### Dalil 6.1. Mean dan Variansi Distribusi Bernoulli

Jika variabel acak  $X$  berdistribusi Bernoulli dengan fungsi massa probabilitas

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x} \quad x = 0, 1$$

maka mean distribusi Bernoulli ini adalah

$$E(X) = p = \mu$$

dan variansinya adalah

$$V(X) = p(1 - p) = pq$$

dan momen ke  $r$  dari variabel acak  $X$  ini adalah

$$E(X) = E(X^2) = \dots = E(X^r) = p.$$

Bukti:

Mean distribusi Bernoulli

$$E(X) = 0(1 - p) + 1(p) = p$$

Variansi distribusi ini

$$V(X) = E(X - \mu)^2$$

$$V(X) = (0 - \mu)^2 P(X = 0) + (1 - \mu)^2 P(X = 1)$$

$$V(X) = (0 - p)^2 (1 - p) + (1 - p)^2 p$$

$$V(X) = p^2 (1 - p) + (1 - p)^2 p = p(1 - p) = pq$$

momen ke  $r$  dari variabel acak  $X$  ini adalah

$$E(X^r) = (0)^r (1 - p) + (1)^r p = p$$

### 6.3. FUNGSI GENERATOR MOMEN DISTRIBUSI BERNOULLI

#### Dalil 6.2. Fungsi Generator Momen Distribusi Bernoulli

Jika variabel acak  $X$  berdistribusi Bernoulli dengan fungsi massa probabilitas

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x} \quad x = 0, 1$$

maka fungsi generator momen distribusi Bernoulli ini adalah

$$M_X(t) = q + e^t p$$

Bukti:

Fungsi generator distribusi Bernoulli

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

$$M_X(t) = e^{t(0)} q + e^{t(1)} p$$

$$M_X(t) = q + e^t p$$

#### Contoh 6.1

Suatu perusahaan akan memasarkan suatu produk baru. Kalau berhasil, program pemasaran produk baru tersebut akan menghasilkan keuntungan sebesar 50 000 000 rupiah. Sebaliknya kalau gagal akan menderita kerugian sebesar 10 000 000 rupiah. Probabilitas berhasilnya program pemasaran ini sebesar enam per sepuluh. Berapakah mean dan variansi hasil program pemasaran produk baru ini?

Jawab:

Bila  $Y$  menyatakan hasil program pemasaran produk tersebut, maka

$$Y = \begin{cases} -10000000 \text{ rupiah} & \text{if "Program pemasaran gagal"} \\ 50000000 \text{ rupiah} & \text{if "Program pemasaran berhasil"} \end{cases}$$

$$Y := \begin{pmatrix} -10000000 \\ 50000000 \end{pmatrix} \text{ rupiah} \quad Y = \begin{pmatrix} -1 \times 10^7 \\ 5 \times 10^7 \end{pmatrix} \text{ rupiah}$$

$$y := Y$$

$$p := 0.6$$

variabel acak  $Y$  bernilai

$$y = \begin{pmatrix} -1 \times 10^7 \\ 5 \times 10^7 \end{pmatrix} \text{ rupiah}$$

Bila ditulis:

$$X := \frac{Y - y_1}{y_2 - y_1}$$

maka

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tampak variabel acak  $X$  ini berdistribusi Bernoulli.

$$E(\text{VariabelAcak}) := \begin{cases} p & \text{if VariabelAcak} = \text{str2vec}("X")_1 \\ \text{error}("Tidak\ didefinisikan") & \text{otherwise} \end{cases}$$

$E(X)$  atau mean  $X$

$$E(X) = 0.6$$

$$V(\text{VariabelAcak}) := \begin{cases} p(1-p) & \text{if VariabelAcak} = \text{str2vec}("X")_1 \\ \text{error}("Tidak\ didefinisikan") & \text{otherwise} \end{cases}$$

$V(X)$  atau variansi  $X$

$$V(X) = 0.24$$

$$p = 0.6$$

$$1 - p = 0.4$$

Variabel acak  $Y$  dapat dinyatakan dengan variabel acak  $X$  sebagai berikut:

$$Y = 60000000 \text{ rupiah } X - 10000000 \text{ rupiah}$$

sehingga

$$E(Y) = E(60000000 \text{ rupiah } X - 10000000 \text{ rupiah})$$

$$E(Y) = 60000000 \text{ rupiah } E(X) - 10000000 \text{ rupiah}$$

sedangkan  $E(X) = p$

$$E(Y) = 60000000 \text{ rupiah} p - 10000000 \text{ rupiah}$$

$$E(\text{VariabelAcak}) := \begin{cases} [(60000000) p - 10000000] \text{ rupiah} & \text{if } \text{VariabelAcak} = \text{str2vec}("Y")_1 \\ \text{error}("Tidak\ didefinisikan") & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E(Y) = 2.6 \times 10^7 \text{ rupiah}$$

Jadi mean hasil program pemasaran produk baru tersebut

$$E(Y) = 2.6 \times 10^7 \text{ rupiah}$$

Sedangkan variansi variabel acak  $Y$

$$V(Y) = V(60000000 \text{ rupiah} X - 10000000 \text{ rupiah})$$

$$V(Y) = V(60000000 \text{ rupiah} X) + V(10000000 \text{ rupiah})$$

$$V(Y) = (60000000 \text{ rupiah})^2 V(X) + 0$$

$$\text{sedangkan } V(X) = p(1 - p)$$

maka

$$V(Y) = (60000000 \text{ rupiah})^2 [p(1 - p)]$$

$$V(\text{VariabelAcak}) := \begin{cases} (60000000 \text{ rupiah})^2 [p(1 - p)] & \text{if } \text{VariabelAcak} = \text{str2vec}("Y")_1 \\ \text{error}("Tidak\ didefinisikan") & \text{otherwise} \end{cases}$$

jadi variansi hasil program pemasaran produk baru ini

$$V(Y) = 8.64 \times 10^{14} \text{ rupiah}^2$$