PROBABILITAS DAN STATISTIKA

DISTRIBUSI BINOMIAL

Dr. Ir. H. K. P. Muhammad Sutarno, S.H.I., M.Sc., M.Ag.
Dosen Program Studi Teknik Industri Tahun 1976-2012
Institut Teknologi Bandung

Ciri-ciri percobaan binomial:

1. Ada n percobaan Bernoulli yang identik dan saling bebas.

Yang diperhatikan di percobaan Bernoulli hanyalah takterjadi peristiwa / gagal atau terjadi suatu peristiwa / berhasil, katakanlah gagal "G" atau berhasil "H". Jadi ruang sampelnya percobaan Bernoulli:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \text{"G"} \\ \text{"H"} \end{pmatrix}$$

2. Setiap percobaan dari n percobaan Bernoulli, probabilitas berhasil "H" senantiasa konstan yaitu p selalu sama untuk tiap-tiap percobaan. Probabilitas gagal "G" sebesar q = 1-p selalu sama untuk tiap-tiap percobaan.
3. Variabel acak X menyatakan jumlah berhasil "H" yang dihasilkan dari n percobaan tersebut.

Definisi 7.1. Distribusi Binomial

Variabel acak X berdistribusi Binomial bila variabel acak X mempunyai fungsi massa probabilitas

$$b(x,n,p) = \begin{vmatrix} \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^{x}\,(1-p)^{n-x} & \text{if } (n>0) \wedge (x \le n) \wedge (0 < p < 1) \\ 0 \quad \text{otherwise} \end{vmatrix}$$

di mana:

b menyatakan fungsi massa probabilitas distribusi binomial

n menyatakan jumlah percobaan Bernoulli yang identik dan saling bebas.

x menyatakan nilai variabel acak X yang menunjukkan nilai jumlah berhasil "H" yang dihasilkan dari n percobaan tersebut.

p menyatakan besarnya probabilitas berhasil "H" yang besarnya konstan yaitu p selalu sama untuk tiap-tiap percobaan. Probabilitas gagal "G" sebesar q = 1-p selalu sama untuk tiap-tiap percobaan.

Contoh 7.1

Suatu perusahaan perakitan mobil menerima order merakit berbagai jenis mobil. Dari sepuluh pemberi order ada tiga pemberi order yang sangat puas dengan hasil perakitan perusahaan ini.

Pada saat ini perusahaan sedang menerima delapan order.

a. Berapa probabilitas dari delapan pemberi order akan ada tepat lima pemberi order yang sangat puas dengan hasil perakitan perusahaan tersebut?

b. Berapa probabilitas akan ada paling banyak dua pemberi order yang sangat puas dengan hasil perakitan perusahaan tersebut?

Jawab:

a. Bila *X* menyatakan variabel acak jumlah pemberi order yang sangat puas.

$x := 5$ jumlah pemberi order yang sangat puas.

$n := 8$ jumlah percobaan Bernoulli yang identik dan saling bebas.

$p := 0.3$ besarnya probabilitas pemberi order yang sangat puas untuk tiap-tiap percobaan.

Probabilitas dari delapan pemberi order akan ada tepat lima pemberi order yang sangat puas dengan hasil perakitan perusahaan tersebut

$$b(x,n,p) := \begin{cases} \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^{x}\,(1-p)^{n-x} & \text{if } (n > 0) \wedge (x \le n) \wedge (0 < p < 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$b(x,n,p) = 0.04668$

$$\frac{n!}{x!\,(n-x)!} = 56$$

$$n! = 4.032 \times 10^{4}$$

$$x! = 120$$

$$(n-x)! = 6$$

$$p^{x} = 2.43 \times 10^{-3}$$

$$(1-p)^{n-x} = 0.343$$

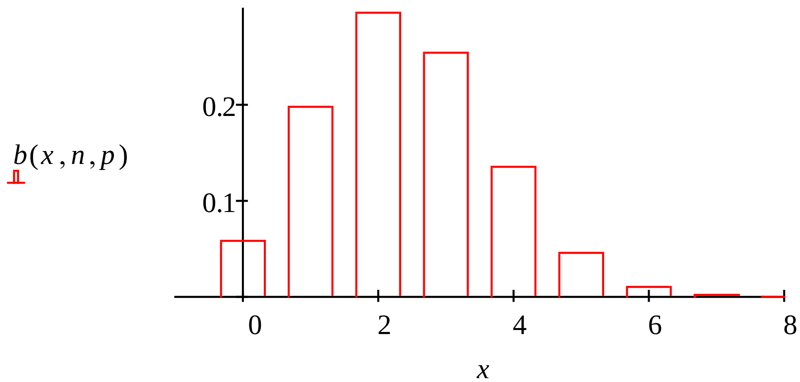
$$1-p = 0.7$$

$$n-x = 3$$

Gambar fungsi massa distribusi binomial untuk contoh ini

$x := 0..n$

$x =$	$b(x,n,p) =$
0	0.05765
1	0.19765
2	0.29648
3	0.25412
4	0.13614
5	0.04668
6	0.01
7	$1.22472 \cdot 10^{-3}$
8	$6.561 \cdot 10^{-5}$



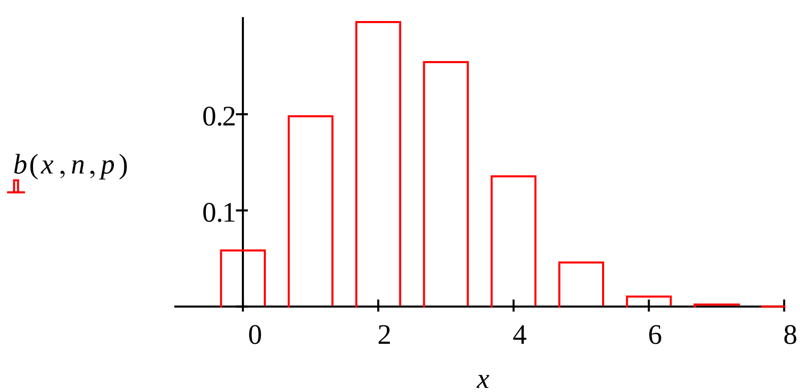
b. Probabilitas akan ada paling banyak dua pemberi order yang sangat puas dengan hasil perakitan perusahaan tersebut

$$\sum_{x=0}^{2} b(x,n,p) = 0.55177$$

$$b(0,n,p) = 0.05765$$
$$b(1,n,p) = 0.19765$$
$$b(2,n,p) = 0.29648$$

$x := 0..n$

$x =$	$b(x,n,p) =$
0	0.05765
1	0.19765
2	0.29648
3	0.25412
4	0.13614
5	0.04668
6	0.01
7	$1.22472 \cdot 10^{-3}$
8	$6.561 \cdot 10^{-5}$



Dalil 6.2. Variansi Distribusi Binomial

Jika variabel acak X berdistribusi binomial dengan fungsi massa probabilitas

$$b(x,n,p) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!}\, p^{x}\,(1-p)^{n-x} & \text{if } (n>0) \wedge (x \le n) \wedge (0 < p < 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

maka mean distribusi binomial adalah

$$E(X) = \mu = n\,p$$

Bukti:

Perhatikan

$$(p+q)^{n} = \frac{n!}{0!\,n!}\,p^{0}\,q^{n} + \frac{n!}{1!\,(n-1)!}\,p^{1}\,q^{n-1} + \ldots + \frac{n!}{n!\,0!}\,p^{n}\,q^{0}$$

$$(p+q)^{n} = \sum_{x=0}^{n} \left[\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^{x}\,q^{n-x}\right]$$

apabila

$$q = 1-p$$

maka

$$(p+q)^{n} = 1 = \sum_{x=0}^{n} \left[\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^{x}\,q^{n-x}\right]$$

Mean distribusi binomial adalah

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} (x\,b(x,n,p))$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} \left[x\left[\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^{x}\,(1-p)^{n-x}\right]\right]$$

$$E(X) = 0\left[\frac{n!}{0!\,(n-0)!}\,p^{0}\,(1-p)^{n-0}\right] + \sum_{x=1}^{n} \left[x\left[\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^{x}\,(1-p)^{n-x}\right]\right]$$

$$E(X) = 0 + \sum_{x=1}^{n} \left[x\left[\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^{x}\,(1-p)^{n-x}\right]\right]$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{n} \left[\frac{n!}{(x-1)!\,(n-x)!}\, p^{x}\, (1-p)^{n-x} \right]$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{n} \left[\frac{n\,[(n-1)!]}{(x-1)!\,(n-x)!}\, p^{x}\, (1-p)^{n-x} \right]$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{n} \left[\frac{n\,[(n-1)!]}{(x-1)!\,(n-x)!}\, p^{x}\, (1-p)^{n-x} \right]$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{n} \left[\frac{n\,[(n-1)!]}{(x-1)!\,(n-x)!} \left(p\ p^{x-1}\right) (1-p)^{n-x} \right]$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{n} \left[n\,p \left[\frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}\, p^{x-1}\, (1-p)^{n-x} \right]\right]$$

$$E(X) = n\,p \sum_{x=1}^{n} \left[\frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}\, p^{x-1}\, (1-p)^{n-x} \right]$$

$$E(X) = n\,p \sum_{x-1=1-1}^{n-1} \left[\frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}\, p^{x-1}\, (1-p)^{n-x} \right]$$

sedangkan

$$\sum_{x-1=1-1}^{n-1} \left[\frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}\, p^{x-1}\, (1-p)^{n-x} \right] = \sum_{x-1=0}^{n-1} \left[\frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}\, p^{x-1}\, (1-p)^{n-x} \right]$$

$$\sum_{x-1=0}^{n-1} \left[\frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}\, p^{x-1}\, (1-p)^{n-x} \right] = [p + (1-p)]^{(x-1)+(n-x)} = 1$$

Jadi

$$E(X) = n\,p \sum_{x-1=1-1}^{n-1} \left[\frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}\, p^{x-1}\, (1-p)^{n-x} \right] = n\,p$$

Contoh 7.2

Dari Contoh 7.1 didapat mean X yaitu

$\mu := n\,p$

$\mu = 2.4$

Dalil 6.2. Variansi Distribusi Binomial

Jika variabel acak X berdistribusi binomial dengan fungsi massa probabilitas

$$b(x,n,p) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^x\,(1-p)^{n-x} & \text{if } (n>0)\wedge(x\le n)\wedge(0<p<1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

maka variansi distribusi binomial adalah

$V(X) = \sigma^2 = n\,p\,(1-p)$

Bukti:

$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2)$ bisa didapat dari

$E[X\,(X-1)] = E(X^2) - E(X)$

atau

$E(X^2) = E[X\,(X-1)] + E(X)$

sehingga

$V(X) = \sigma^2 = E[X\,(X-1)] + E(X) - (E(X))^2$

Perhatikan

$$E[X\,(X-1)] = \sum_{x=0}^{n} [x\,(x-1)\,b(x,n,p)]$$

$$E[X\,(X-1)] = \sum_{x=0}^{n} \left[x\,(x-1)\left[\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^x\,(1-p)^{n-x}\right]\right]$$

$$E[X\,(X-1)] = 0 + 0 + \sum_{x=2}^{n} \left[x\,(x-1)\left[\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^x\,(1-p)^{n-x}\right]\right]$$

$$E[X\ (X-1)] = \sum_{x=2}^{n} \left[x\ (x-1) \left[\frac{n!}{x\ (x-1)\ (x-2)!\ (n-x)!}\ p^{x}\ (1-p)^{n-x} \right] \right]$$

$$E[X\ (X-1)] = \sum_{x=2}^{n} \left[\frac{n!}{(x-2)!\ (n-x)!}\ p^{x}\ (1-p)^{n-x} \right]$$

$$E[X\ (X-1)] = \sum_{x=2}^{n} \left[\frac{n!}{(x-2)!\ (n-x)!}\ p^{x}\ (1-p)^{n-x} \right]$$

$$E[X\ (X-1)] = \sum_{x=2}^{n} \left[\frac{n\ (n-1)\ (n-2)!}{(x-2)!\ (n-x)!}\ p^{2}\ p^{x-2}\ (1-p)^{n-x} \right]$$

$$E[X\ (X-1)] = n\ (n-1)\ p^{2} \sum_{x=2}^{n} \left[\frac{(n-2)!}{(x-2)!\ (n-x)!}\ p^{x-2}\ (1-p)^{n-x} \right]$$

$$E[X\ (X-1)] = n\ (n-1)\ p^{2} \sum_{x=2}^{n} \left[\frac{(n-2)!}{(x-2)!\ (n-x)!}\ p^{x-2}\ (1-p)^{n-x} \right]$$

$$E[X\ (X-1)] = n\ (n-1)\ p^{2} \sum_{x-2=2-2}^{n-2} \left[\frac{(n-2)!}{(x-2)!\ (n-x)!}\ p^{x-2}\ (1-p)^{n-x} \right]$$

sedangkan

$$\sum_{x-2=0}^{n-2} \left[\frac{(n-2)!}{(x-2)!\ (n-x)!}\ p^{x-2}\ (1-p)^{n-x} \right] = [p + (1-p)]^{(x-2)+(n-x)}$$

$$\sum_{x-2=0}^{n-2} \left[\frac{(n-2)!}{(x-2)!\ (n-x)!}\ p^{x-2}\ (1-p)^{n-x} \right] = [p + (1-p)]^{(x-2)+(n-x)} = 1$$

sehingga

$$E[X\ (X-1)] = n\ (n-1)\ p^{2} \sum_{x-2=2-2}^{n-2} \left[\frac{(n-2)!}{(x-2)!\ (n-x)!}\ p^{x-2}\ (1-p)^{n-x} \right]$$

$$E[X\ (X-1)] = n\ (n-1)\ p^{2}$$

sedangkan

$$E(X) = n\,p$$

maka variansi

$$V(X) = \sigma^2 = E[X\ (X-1)] + E(X) - (E(X))^2$$

$$V(X) = \sigma^2 = n\,(n-1)\,p^2 + n\,p - (n\,p)^2$$

$$V(X) = \sigma^2 = n^2\,p^2 - n\,p^2 + n\,p - (n\,p)^2$$

$$V(X) = \sigma^2 = -n\,p^2 + n\,p$$

$$V(X) = \sigma^2 = n\,p\,(1-p)$$

Contoh 7.3

Dari Contoh 7.1 didapat variansi *X* yaitu

$$\sigma^2 := n\,p\,(1-p)$$

$$\sigma^2 = 1.68$$

Dalil 6.3. Fungsi Generator Momen Distribusi Binomial

Jika variabel acak *X* berdistribusi binomial dengan fungsi massa probabilitas

$$b(x,n,p) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^x\,(1-p)^{n-x} & \text{if } (n > 0) \wedge (x \le n) \wedge (0 < p < 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

maka fungsi generator momen distribusi binomial adalah

$$M(t) = E\left(e^{t\,X}\right) = \left[1 + p\left(e^t - 1\right)\right]^n$$

Bukti:

$$M(t) = E\left(e^{t\,X}\right) = \sum_{x=0}^{n}\left(e^{t\,x}\,b(x,n,p)\right)$$

$$M(t) = E\left(e^{t\,X}\right) = \sum_{x=0}^{n}\left[e^{t\,x}\left[\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,p^x\,(1-p)^{n-x}\right]\right]$$

$$M(t) = \sum_{x=0}^{n}\left[\frac{n!}{x!\,(n-x)!}\,e^{t\,x}\,p^x\,(1-p)^{n-x}\right]$$

$$M(t) = \sum_{x=0}^{n} \left[\frac{n!}{x!\,(n-x)!} \left(p\ e^t\right)^x (1-p)^{n-x} \right]$$

$$M(t) = \left[p\ e^t + (1-p)\right]^{x+(n-x)}$$

$$M(t) = \left[1 + p\ \left(e^t - 1\right)\right]^n$$

Apabila ditulis turunan ke-*r* dari fungsi generator momen terhadap *t*

$$TM(r,t) = \frac{d^r}{dt^r} M(t)$$

Untuk $r = 1$

$$TM(1,t) = \frac{d^1}{dt^1} M(t)$$

$$TM(1,t) = \frac{d^1}{dt^1} \left[1 + p\ \left(e^t - 1\right)\right]^n$$

$$TM(1,t) = n\ p\ e^t \left[p\ \left(e^t - 1\right) + 1\right]^{n-1}$$

Untuk

$t = 0$

$TM(1,0) = n\ p$ **momen ke-1 atau *E*(*X*) atau mean(*X*)**

tampak di atas untuk turunan pertama fungsi generator momen terhadap *t* untuk *t*=0 ternyata menyatakan **momen pertama** distribusi binomial.

Secara umum turunan ke-*r* fungsi generator momen terhadap *t* untuk *t*=0 ternyata menyatakan **momen ke-*r*** distribusi binomial.

$$TM(r,t) = \frac{d^r}{dt^r} M(t)$$

$TM(r,0) = E\left(X^r\right)$ **momen ke-*r***

Untuk mendapatkan variansi X dapat menggunakan fungsi generator momen

$$V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\sigma^2 = TM(2,0) - (TM(1,0))^2$$

$$TM(2,0) = n(n-1)p^2 + np$$

$$TM(1,0) = np$$

$$\sigma^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$

$$\sigma^2 = np(1-p)$$