DISTRIBUSI SAMPEL

Oleh: Dr. Ir. H. Muhammad Sutarno, S.H.I., M.Sc., M.Ag.

Distribusi sampel (*sample distribution*) atau disebut juga distribusi penyampelan (*sampling distribution*). Di dalam bab ini akan dibahas sampel acak, statistik, distribusi sampel, mean sampel acak dan variansi mean sampel acak. Selain itu, dibahas dalil limit sentral, distribusi χ^2 dari distribusi normal baku, distribusi sampel $mean(X)$ dari distribusi populasi normal, distribusi sampel

$$\frac{mean(X) - \mu}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)} = Z$$

dari distribusi populasi normal *X*.

Selain itu, dibahas distribusi sampel $\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2}$ dari populasi normal,

distribusi sampel $\frac{mean(X) - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ dari populasi normal,

dan distribusi sampel $\frac{(S_1)^2}{(S_2)^2}$ dari populasi-populasi normal

21.1. SAMPEL ACAK

Sampel acak (*random sample*) atau contoh acak didefinisikan seperti di bawah ini:

Definisi 21.1. Sampel Acak

Sampel acak yang berukuran *n* dari populasi variabel acak *X* adalah sampel yang terdiri dari himpunan variabel-variabel acak $X_1, X_2, ..., X_n$ yang berdistribusi sama, yang saling bebas, yang masing-masing variabel acak tersebut berdistribusi *X*.

Jika variabel acak *X* merupakan variabel acak diskrit dengan fungsi massa probabilitas (*probability mass function*) *p* dan jika $X_1, X_2, ..., X_n$ adalah sampel acak berukuran *n* dari *X* maka fungsi massa probabilitas bersama mereka (*joint probability mass function*) adalah

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = p(X_1 = x_1)\, p(X_2 = x_2) \dots p(X_n = x_n) = p(x_1)\, p(x_2) \dots p(x_n)$$

Contoh 21.1

Bila X berdistribusi Poisson dengan parameter , yakni

$$P(X = x) = P(x,\lambda) = \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0,1,2,\ldots$$

dan jika diambil sampel acak berukuran n, maka fungsi massa probabilitas bersama dari sampel acak ini adalah

$$p\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) = p\left(X_1 = x_1\right) p\left(X_2 = x_2\right) \ldots p\left(X_n = x_n\right) = p\left(x_1\right) p\left(x_2\right) \ldots p\left(x_n\right)$$

atau sama dengan

$$\frac{\lambda^{x_1} e^{-\lambda}}{x_1!} \frac{\lambda^{x_2} e^{-\lambda}}{x_2!} \ldots \frac{\lambda^{x_n} e^{-\lambda}}{x_n!}$$

atau

$$p\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$$

atau

$$p\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) = \frac{\lambda^{x_1+x_2+\ldots+x_n} e^{-n\lambda}}{x_1!\, x_2! \ldots x_n!}$$

atau

$$p\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) = \frac{\lambda^{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} e^{-n\lambda}$$

Contoh 21.2

Bila X berdistribusi normal dengan parameter μ dan σ, di mana fungsi padatnya

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

dan jika diambil sampel acak berukuran n, maka fungsi padat probabilitas bersama dari sampel acak ini adalah

$$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) = f\left(x_1\right) f\left(x_2\right) \ldots f\left(x_n\right)$$

atau sama dengan

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)^2}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)^2}\right]\cdots\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\mu}{\sigma}\right)^2}\right]$$

atau sama dengan

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \frac{1}{\sigma^n\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

21.2. STATISTIK

Definisi 21.2. Statistik

Misal $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel acak berukuran *n* dari *X* dengan nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dan misal *H* adalah fungsi untuk $x_1, x_2, \ldots, x_n$ maka didefinisikan $Y = H\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ sebagai statistik dengan nilai statistiknya $y = H\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$.
Tampak bahwa statistik adalah setiap fungsi dari sampel acak, jadi statistik juga merupakan variabel acak juga.
Yang penting lagi bahwa statistik tidak digantungkan dengan parameter yang tidak diketahui.

Contoh 21.3

Contoh-contoh statistik adalah:

(1) $\sum_{i=1}^{n} X_i$

(2) $\prod_{i=1}^{n} X_i$

(3) $\sum_{i=1}^{n}\left[i\left(X_i\right)^i\right]$

(4) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$ adalah statistik jika parameter μ diketahui.

Jika parameter μ tidak diketahui maka

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$ bukan statistik.

(6) $S(X)=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-mean(X)\right)^2}{n}}$ simpang baku sampel

(7) $A = min\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)$ minimum sampel

(8) $B = max\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)$ maksimum sampel

(9) $R = B - A = max\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right) - min\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)$

rentang (*range*) sampel

Apabila sampel acak berukuran *n* dari variabel acak *X* yaitu X_1,X_2 ,..., X_n diurutkan nilainya dari nilai terkecil sampai dengan nilai terbesar sehingga berbentuk: X_1,X_2 ,..., X_n di mana $X_1 \le X_2 \le \ldots \le X_n$ maka statistik yang didapat dari sampel yang sudah berurut demikian disebut statistik urut.

Contoh 21.4

Contoh-contoh statistik urut adalah:

(1) $\frac{X_1+X_n}{2}$

(2) Rentang (*range*) sampel: $R = X_n - X_1$

(3) Median sampel: $median(X) = \begin{cases} X_{\frac{n+1}{2}} & if\ \ n = ganjil \\ \frac{X_{\frac{n}{2}}+X_{\frac{n}{2}+1}}{2} & if\ \ n = genap \end{cases}$

Definisi 21.3. Distribusi Sampel

Distribusi sampel statistik *Y* adalah distribusi probabilitas dari statistik *Y*.
Distribusi sampel atau disebut juga distribusi penyampelan.

21.3. MEAN DARI MEAN SAMPEL ACAK DAN VARIANSI DARI MEAN SAMPEL ACAK

Dalil 21.1. Mean dari Mean Sampel Acak dan Variansi dari Mean Sampel Acak
Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel acak berukuran *n* dari *X* dengan mean populasi $E(X) = \mu$ dan variansi populasi $Var(X) = \sigma^2$, dan jika mean sampel acak

$$mean(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

maka ekspektasi mean sampel acak atau mean dari mean sampel acak

$$E(mean(X)) = E(X) = \mu$$

dan variansi mean sampel acak

$$Var(mean(X)) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Bukti:

Mean sampel acak X: $mean(X) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$,

ekspektasi mean sampel acak *X* yakni

$$E(mean(X)) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)$$

atau

$$E(mean(X)) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

atau

$$E(mean(X)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Karena $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel acak berukuran *n* dari *X* dengan mean populasi $\mu = E(X)$ maka $E(X_1) = E(X_2) = \ldots = E(X_n) = E(X) = \mu$ sehingga

$$E(mean(X)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\, n\, E(X) = E(X) = \mu$$

Sedangkan

$$Var(mean(X)) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)$$

atau

$$Var(mean(X)) = \frac{1}{n^2}\, Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

atau

$$Var(mean(X)) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

karena $X_1, X_2, ..., X_n$ sampel acak berukuran *n* dari *X* dengan variansi populasi $Var(X) = \sigma^2$ maka $Var(X_1) = Var(X_2) = ... = Var(X_n) = Var(X) = \sigma^2$

sehingga

$$Var(mean(X)) = \frac{1}{n^2}\, n\, Var(X) = \frac{Var(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

21.4. DALIL LIMIT SENTRAL (DLS)

Dalil 21.2. Limit Sentral

Jika $X_1, X_2, ..., X_n$ variabel-variabel acak yang berdistribusi sama, yang saling bebas, yang masing-masing variabel acak tersebut berdistribusi *X* dengan mean $E(X) = \mu$ dan variansi $Var(X) = \sigma^2$, serta fungsi generator momen $M_X(t)$, $mean(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, dan jika *n* mendekati takhingga maka distribusi statistik

$$Z = \frac{mean(X) - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

merupakan distribusi normal baku.

Bukti:

Dikatakan statistik $Z = \dfrac{mean(X) - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ berarti bahwa nilai μ dan σ^2 diketahui.

Kalau fungsi generator momen *Z* ditulis sebagai $M_Z(t)$, maka

$$M_Z(t) = E\left(e^{tZ}\right) = E\left(e^{t\frac{mean(X)-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}\right) = E\left[e^{\frac{t\sqrt{n}}{\sigma}(mean(X)-\mu)}\right]$$

atau

$$M_Z(t) = E\left(e^{\frac{t\sqrt{n}}{\sigma}mean(X)-\frac{t\sqrt{n}}{\sigma}\mu}\right) = E\left(e^{\frac{t\sqrt{n}}{\sigma}mean(X)}\; e^{-\frac{t\sqrt{n}}{\sigma}\mu}\right)$$

kalau ini dilimitkan

$$\lim_{n \to \infty} M_Z(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Bentuk FGM - fungsi generator momen di atas adalah bentuk FGM distribusi normal *Z* dengan mean sama dengan nol dan sigma sama dengan satu.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty < z < \infty$$

21.5. DISTRIBUSI χ^2 **DARI DISTRIBUSI NORMAL BAKU *X***

Perhatikan variabel acak *X*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Dalil 21.3. Distribusi χ^2 dari Distribusi Normal Baku *X*

Jika X berdistribusi normal baku, maka X^2 berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas satu.

$$f(\chi^2, 1) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,\chi^{2\,\frac{-1}{2}}\,e^{-\left(\frac{\chi^2}{2}\right)}$$

Dalil 21.4

Jika X berdistribusi normal baku, maka

$Y = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i\right)^2$ berdistribusi $\chi 2$ dengan derajat bebas n.

$$f(y, n) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,y^{\frac{n-2}{2}}\,e^{-\left(\frac{y}{2}\right)}$$

$$EY(n) = n$$

$$VY(n) = 2\,n$$

Jika $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \mu\right)^2}{n-1}$ di mana X berdistribusi normal dengan μ dan variansi σ^2

maka

$\dfrac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2}$ berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas $\nu = n - 1$

Bukti:

$\dfrac{X_1 - \mu}{\sigma}$ berdistribusi normal baku

$\dfrac{X_2 - \mu}{\sigma}$ berdistribusi normal baku

.
.
.

$\frac{X_n - \mu}{\sigma}$ berdistribusi normal baku

$\left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right)^2$ berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas satu,

$\left(\frac{X_2 - \mu}{\sigma}\right)^2$ berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas satu,

.
.
.

$\left(\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2$ berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas satu,

$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$ berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas *n*,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu + mean(X) - mean(X)}{\sigma}\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{n\,(mean(X) - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - mean(X)\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{(mean(X) - \mu)^2}{\frac{\sigma^2}{n}} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - mean(X)\right)^2$$

sedangkan $\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - mean(X)\right)^2 = (n-1)\, S^2$

maka

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{(mean(X) - \mu)^2}{\frac{\sigma^2}{n}} + \frac{1}{\sigma^2} \left[(n-1)\, S^2\right]$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\left[\frac{(mean(X)-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right]^2+\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2-\left[\frac{(mean(X)-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right]^2$$

$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas *n*

$\left[\frac{(mean(X)-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right]^2$ berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas satu

maka

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas *n*-1

Atau

$\frac{n\,S_n^2}{\sigma^2}$ berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas *n*-1 di mana

$$S_n^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{n}$$

Distribusi *T*

Z berdistribusi normal baku,
Y berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas $\nu = n-1$

$$T=\frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}}\qquad -\infty < t < \infty \qquad \nu = n-1$$

T berdistribusi *student* atau berdistribusi Gosset dengan derajat bebas $\nu = n - 1$ dengan fungsi padat probabilitas

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

$$E(T) = 0$$

$$V(T) = \frac{\nu}{\nu - 2}$$

fungsi gamma: $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} y^{n-1} e^{-y}\, dy$

Dalil 21.5

Jika dari populai X yang berdistribusi normal

$N(x, \mu, \sigma^2)$

diambil sampel acak berukuran n maka

$$\frac{mean(X) - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}} \quad \text{atau} \quad \frac{mean(X) - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

berdistribusi T dengan derajat bebas $\nu = n - 1$

Bukti:

$\dfrac{mean(X) - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ berdistribusi normal baku, dan

$\dfrac{(n-1)\, S^2}{\sigma^2}$ berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas $\nu = n - 1$

di mana $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - mean(X)\right)^2}{n-1}$

Jika dibentuk

$$\frac{\dfrac{mean(X)-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\dfrac{\dfrac{(n-1)\ S^2}{\sigma^2}}{n-1}}} = \frac{\dfrac{mean(X)-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\dfrac{S}{\sigma}} = \frac{mean(X)-\mu}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$$

berdistribusi *T* dengan derajat bebas $\nu = n-1$

Definisi 21.4. Distribusi *F*

Jika *U* berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas ν_1 dan *V* berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas ν_2 serta *U* dan *V* saling bebas maka didefinisikan distribusi *F* sebagai

$$F = \frac{\dfrac{U}{\nu_1}}{\dfrac{V}{\nu_2}}$$ di mana fungsi padat probabilitasnya

$$g(f) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_2}{2}\right)}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \frac{f^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{\left(1+\dfrac{\nu_1}{\nu_2}f\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}$$

dengan

$$E(F) = \frac{\nu_2}{\nu_2-2} \qquad \text{dan} \qquad V(F) = \frac{2\,\nu_2^{\,2}\left(\nu_1+\nu_2-2\right)}{\nu_1\left(\nu_2-4\right)\left(\nu_2-2\right)^2}$$

Dalil 21.5

Jika dari populasi normal pertama diambil *m* sampel acak dan dari populasi normal kedua diambil *n* sampel acak, sedangkan

$$(\sigma_1)^2 = (\sigma_2)^2$$

maka

$$\frac{(S_1)^2}{(S_2)^2}$$ bersdistriusi *F* dengan derajat bebas

$\nu_1 = m - 1$ dan $\nu_2 = n - 1$

Bukti:

$$\frac{(m-1)\,(S_1)^2}{(\sigma_1)^2}$$ berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas $\nu_1 = m - 1$

$$\frac{(n-1)\,(S_2)^2}{(\sigma_2)^2}$$ berdistribusi khi kuadrat dengan derajat bebas $\nu_2 = n - 1$

jika dibentuk

$$\frac{\dfrac{\dfrac{(m-1)\,(S_1)^2}{(\sigma_1)^2}}{m-1}}{\dfrac{\dfrac{(n-1)\,(S_2)^2}{(\sigma_2)^2}}{n-1}} = \frac{\dfrac{(S_1)^2}{(\sigma_1)^2}}{\dfrac{(S_2)^2}{(\sigma_2)^2}} = \frac{(S_1)^2}{(S_2)^2}$$

maka

$$\frac{(S_1)^2}{(S_2)^2}$$ berdistribusi *F* dengan derajat bebas $\nu_1 = m - 1$ dan $\nu_2 = n - 1$